

— Traité de Génie Civil —
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Volume 5

ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS

Coques

François Frey et Marc-André Studer



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

— Traité de Génie Civil —
Volume 5

ANALYSE DES STRUCTURES
ET MILIEUX CONTINUS



Eiskapelle (Heinz Isler)

Tente en glace ; base en étoile produisant un effet de structure plissée raidissant la coque ; hauteur de 6 m.

«Everything in nature, whatever you find is organic shape, is double curvature, nothing plane.»

«Where traditional statics ends, there the calculation of a shell starts.»

Heinz Isler

(tiré de Chilton J., *Heinz Isler*, Thomas Telford, 2000)

Illustration de couverture :

Weihnachtsdorf (Heinz Isler, 1980-1981)

Dômes et tentes en glace

Photographies de Heinz Isler

(consulter la bibliographie, ainsi que *Spiel ohne Grenzen*, H. Isler,
Technische Universität München, Nov. 2000)

— Traité de Génie Civil —
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

publié sous la direction de René Walther et Manfred A. Hirt

Volume 5

ANALYSE DES STRUCTURES
ET MILIEUX CONTINUS

Coques

François Frey

Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Marc-André Studer

Chargé de cours à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Dessins réalisés par

Maurice Fiaux



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

— Traité de Génie Civil —

de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Cet ouvrage fait partie d'une série d'une vingtaine de volumes qui sont publiés sous la direction de René Walther et Manfred Hirt, professeurs à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, dont la liste suivante, non exhaustive, présente le plan général de publication (voir l'état des parutions sur notre site web www.epflpress.org).

1. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Statique appliquée
2. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Mécanique des structures
3. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Mécanique des solides
4. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Poutres et plaques
5. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Coques
6. ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS
Méthode des éléments finis
7. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON
Bases et technologie
8. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES EN BÉTON
Aptitude au service et éléments de structures
9. PONTS EN BÉTON
Généralités, conception et dimensionnement
10. CONSTRUCTION MÉTALLIQUE
Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement
11. CHARPENTES MÉTALLIQUES
Conception et dimensionnement des halles et bâtiments
12. PONTS EN ACIER
Conception et dimensionnement des ponts métalliques et mixtes acier-béton
13. CONSTRUCTION EN BOIS
Matériaux, technologie et dimensionnement
14. VOIES DE CIRCULATION
Routes et chemins de fer, conception et construction
15. CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES
Ecoulements stationnaires
16. HYDRAULIQUE FLUVIALE
Ecoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple
17. BARRAGES
Conception, construction, contrôle
18. MÉCANIQUE DES SOLS ET DES ROCHES
19. FOUILLES ET FONDATIONS
20. OUVRAGES ET TRAVAUX SOUTERRAINS
21. SYSTÈMES ÉNERGÉTIQUES
Offre et demande d'énergie: méthodes d'analyse
22. AMÉNAGEMENTS ÉNERGÉTIQUES
23. ÉTUDES D'IMPACT SUR L'ENVIRONNEMENT
24. MATÉRIAUX
Constitution et lois de comportements rhéologiques

Le Traité de Génie Civil est une publication des Presses polytechniques et universitaires romandes, fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.

Première édition

© 2003, Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne
ISBN 978-2-88074-516-5, version imprimée
ISBN 978-2-88914-293-4, version ebook (PDF), doi.org/10.55430/0205CFFMAS

Ce texte est sous licence Creative Commons:



elle vous oblige, si vous utilisez cet écrit, à en citer l'auteur,
la source et l'éditeur original, sans modifications du texte
ou de l'extrait et sans utilisation commerciale

Avant-propos

Cet ouvrage forme le cinquième maillon de la série d'ouvrages consacrée à l'analyse des structures et milieux continus. Le lecteur peut se reporter à l'avant-propos du premier d'entre eux (TGC vol. 1, *Statique appliquée*), qui reste d'actualité.

Conformément à l'esprit du Traité de Génie Civil, ce livre est le reflet du cours – intitulé *Structures 3D à parois minces* – que les étudiants de la section de Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL) reçoivent durant le septième semestre. Dans un domaine aussi large que celui des coques, on se limite volontairement aux bases classiques, en les présentant de manière simple et avec l'optique de l'ingénieur.

Spécialiste de l'analyse des coques, notre collègue et ami G. Fonder, professeur à l'Université de Liège, a mis à notre disposition ses notes de cours – ce dont le présent ouvrage a fortement bénéficié – et a, de surcroît, relu et discuté l'entier du manuscrit avec un esprit très constructif. Les auteurs le remercient chaleureusement.

Notre collègue J. Jirousek, professeur honoraire, qui a partagé l'enseignement du cours avec les auteurs de nombreuses années, a également laissé des traces importantes dans cet ouvrage, en particulier dans les chapitres 3, 5, 9 et 10. Nous l'en remercions vivement.

Ont également contribué à la valeur du présent texte, de manière directe ou indirecte, les collaborateurs et chercheurs du LSC qui ont consacré leur temps aux exercices, travaux pratiques, travaux de diplôme, travaux de recherche ou thèses de doctorat dans le domaine des coques. Ce sont M. Amieur, Y. Dubois-Pèlerin, C. Falla Luque, A. Ibrahimbegovic, Ph. Jetteur, S. Jaamei, H. Rabemanantsoa, B. Rebora et C. Scholtès.

Enfin, nous remercions également les Presses polytechniques et universitaires romandes (PPUR), qui ont apporté un soutien décisif à la réalisation de ce volume et mis à notre disposition les talents de Mme M.-H. Gellis pour la composition et la mise en page, et ceux de M. M. Fiaux pour l'exécution et le traitement informatisés des dessins, graphiques et photographies.

François Frey
Marc-André Studer

Introduction

Coques : conception, analyse et esthétique

Les structures en coques ne sont pas l'exclusivité de l'ingénieur civil ; elles sont employées également en construction aéronautique, navale, automobile et mécanique, ainsi qu'en génie chimique et nucléaire. Elles ont néanmoins la particularité commune d'être parmi les structures les plus délicates à étudier.

Qu'il s'agisse d'une couverture en voile mince ou d'un réservoir sous pression, d'une coque de navire ou d'un château d'eau, l'ingénieur reste confronté aux deux impératifs usuels suivants : *savoir analyser la structure pour la dimensionner avec précision et sécurité, et savoir concevoir, planifier et construire la structure de manière rationnelle et économique*.

Mais, pour l'ingénieur civil, dans le domaine des coques et structures plissées, survient fréquemment une troisième exigence essentielle : *savoir choisir des formes esthétiques pour donner à la construction un aspect attrayant*. Ce troisième impératif est trop souvent négligé – voire abandonné à d'autres – alors que, dans ce type de structures, *analyse, construction et esthétique sont intimement liés*. Négliger l'une de ces composantes revient à aller au-devant de déboires certains (l'opéra de Sydney restera célèbre à ce point de vue).

Alors que l'analyse surtout (objet de ce texte) et la construction s'enseignent aisément, s'appuyant sur des notions mathématiques et pratiques éprouvées, l'esthétique par contre reste par nature beaucoup plus floue, intuitive, subjective et difficile à cerner avec précision. Dans les structures tridimensionnelles de l'ingénieur civil, elle est un pivot essentiel du projet. Les grands constructeurs de coques l'ont bien compris : ils sont de bons scientifiques, mais ils sont aussi artistes, et ils savent s'appuyer sur des architectes compétents.

La construction des coques s'est fort développée ces soixante dernières années et le recul que l'ingénieur peut prendre aujourd'hui vis-à-vis de ces ouvrages, en ce qui concerne la conception, l'esthétique, la construction et la durabilité, est un excellent guide pour l'avenir. Nombre de ces structures ont été érigées avec peu de théorie mathématique, mais avec une connaissance saine du jeu des forces, du comportement structural et de l'art de construire.

Aujourd'hui, la finesse, l'audace et la complexité des structures tridimensionnelles deviennent monnaie courante, car l'ingénieur bénéficie, grâce au calcul numérique par ordinateur, de moyens d'étude très complets pour comprendre dans le détail la manière dont ces structures transmettent les efforts. Les méthodes analytiques lourdes et souvent imprécises du calcul manuel sont totalement abandonnées. Les méthodes simples et sûres sont par contre conservées tant pour comprendre l'essentiel du fonctionnement structural que pour prédimensionner. L'analyse fine est alors effectuée par un bon programme de calcul par ordinateur (méthode des éléments finis).

L'informatique toutefois ne reste jamais qu'un auxiliaire pour le constructeur : une bonne conception découle d'abord d'un mariage harmonieux des connaissances théoriques et pratiques.

Cadre de l'ouvrage

Ce livre prétend offrir une introduction conséquente à l'analyse théorique et numérique des coques et structures plissées. Dans cette optique, et face à l'étendue des développements dans ce domaine, on s'est restreint aux notions les plus classiques et les plus solides.

Le livre est dédié, pour la plus grande part, aux *coques minces*. La théorie générale la plus simple des coques minces, due à Love, est exposée dans les coordonnées curvilignes des lignes de courbure principale, ce qui évite l'emploi de l'analyse tensorielle. Quelques notions de théorie des coques d'épaisseur modérée sont néanmoins mentionnées en liaison avec la méthode des éléments finis. Au reste, on se limite au cas statique, élastique linéaire, isotrope et, à l'exception des problèmes d'instabilité, géométriquement linéaire (petits déplacements).

L'analyse de certains types courants de coques est développée plus en détail. Dans la mesure du possible, les théories particularisées à ces types sont établies à nouveau. On pourrait craindre un double emploi avec la théorie générale. A vrai dire, cette dernière peut paraître abstraite ou éloignée du sens physique de l'ingénieur. C'est donc pour bien faire saisir le fonctionnement de ces divers types de coques, donner une signification concrète aux termes des équations générales, voire éviter de retenir tous les détails de ces équations, que les théories particularisées sont présentées de façon indépendante. De plus, le lecteur dispose également, de la sorte, d'une certaine autonomie dans les divers chapitres.

On n'a d'ailleurs retenu, des développements précédents, que ce qui peut être utile au constructeur. En fait, ces notions doivent permettre de saisir le mode de travail de la coque et d'en calculer certains éléments, afin d'aborder un calcul aux éléments finis avec confiance et, étape essentielle, d'en contrôler la validité des résultats. Aujourd'hui en effet, seule la méthode des éléments finis est capable d'analyser une coque avec précision. L'ingénieur se doit donc de recourir à cet outil, afin de s'assurer du dimensionnement correct de son ouvrage, mais en connaissance de cause.

Notation

La notation est classique. Les variables sont en italique maigre, les vecteurs et matrices sont en romain gras, et la notation indicelle n'est pas compactée.

Table des matières

AVANT-PROPOS	v
INTRODUCTION	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
1 Description	
1.1 Elément structural à paroi mince	1
1.2 Géométrie de la surface moyenne	2
1.3 Etat membranaire et état flexionnel	8
1.4 Coques	10
1.5 Structures plissées	16
1.6 Autres structures	17
1.7 Analyse des surfaces	19
2 Théorie des coques minces	
2.1 Introduction	29
2.2 Théorie de Love	29
2.3 Elément de coque	30
2.4 Hypothèses	31
2.5 Autres théories	32
2.6 Cinématique	33
2.7 Statique	38
2.8 Loi constitutive	44
2.9 Bilan des inconnues et équations	45
2.10 Conditions aux limites	46
3 Théories particulières	
3.1 Introduction	49
3.2 Théorie membranaire	49
3.3 Théorie en coordonnées cartésiennes	53
3.4 Coques surbaissées	56
4 Coques de révolution – Théorie membranaire	
4.1 Introduction	61
4.2 Géométrie	61

4.3	Equations d'équilibre	63
4.4	Chargement de révolution	67
4.5	Cinématique	70
4.6	Conditions aux limites	73
4.7	Application – Coque cylindrique (chargement de révolution)	74
4.8	Exercices	77
5	Coques de révolution – Théorie flexionnelle sous chargement de révolution	
5.1	Introduction	83
5.2	Géométrie, charges et efforts intérieurs	83
5.3	Equations d'équilibre	85
5.4	Cinématique	86
5.5	Loi constitutive	88
5.6	Bilan et conditions aux limites	88
5.7	Coque cylindrique	88
5.8	Coque cylindrique – Effet flexionnel de bord	93
5.9	Méthode approchée par superposition	97
5.10	Application – Réservoir cylindrique	99
5.11	Coque sphérique – Effet flexionnel de bord	103
5.12	Exercices	112
5.13	Annexes	114
6	Coques de révolution – Jonctions	
6.1	Position du problème	119
6.2	Anneau raidisseur	122
6.3	Réflexions sur les efforts aux jonctions	123
6.4	Calcul des jonctions de coques	125
6.5	Application – Fond de réservoir sous pression	128
6.6	Exercices	132
7	Coques cylindriques – Théorie membranaire	
7.1	Géométrie	135
7.2	Equilibre	136
7.3	Cinématique	138
7.4	Loi constitutive et bilan	139
7.5	Conditions aux limites	139
7.6	Applications	141
7.7	Forme de la directrice d'une voûte autoportante	146
7.8	Conclusion	147
7.9	Exercices	148

8	Coques cylindriques – Théorie flexionnelle	
8.1	Introduction	151
8.2	Équations de la théorie flexionnelle	151
8.3	Calcul d'une coque cylindrique	153
8.4	Voûtes autoportantes	154
8.5	Voûtes longues – Méthode de la poutre	155
8.6	Voûtes raidies	159
8.7	Précontrainte	161
8.8	Exercices	162
8.9	Annexe	165
9	Paraboloïdes	
9.1	Description et généralités	167
9.2	Paraboloïdes hyperboliques	170
9.3	Paraboloïdes elliptiques	177
9.4	Exercices	177
10	Structures plissées	
10.1	Description	181
10.2	Mode de travail	181
10.3	Coques prismatiques	183
10.4	Coques prismatiques droites à simple portée	183
10.5	Méthode par panneaux	184
10.6	Exercice	193
11	Méthodes numériques	
11.1	Introduction	195
11.2	Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	195
11.3	Exigences communes aux éléments finis	197
11.4	Théories et éléments finis	198
11.5	Éléments de coque mince	201
11.6	Éléments plaques-membranes minces	207
11.7	Éléments de coque d'épaisseur modérée	208
11.8	Quelques problèmes de discréétisation	216
11.9	Éléments finis particuliers	224
11.10	Conclusions	227
11.11	Exercices	227
12	Instabilité	
12.1	Complexité et importance du problème	229
12.2	Echec de la théorie classique de l'instabilité	229
12.3	Analyse non linéaire	233

12.4	Forme rationnelle des coques pour lutter contre l'instabilité	240
12.5	Instabilité par fluage et claquement	241
12.6	Deux formules de dimensionnement	242
12.7	Exercices	245
	SOLUTION DES EXERCICES	247
	BIBLIOGRAPHIE	253
	INDEX	257
	NOTATIONS	261
	ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES	263

1 Description

1.1 Élément structural à paroi mince

On considère une portion d'une surface Σ , ainsi que sa normale n au point A (fig. 1.1a). On porte, sur n , le segment BC de longueur t , symétriquement par rapport à A (AB = AC). En faisant parcourir au point A toute la surface Σ , la grandeur t pouvant varier très progressivement, on matérialise un *élément structural*, dit *à paroi mince* si t est petit vis-à-vis de certaines dimensions caractéristiques de Σ ($t < L$, $t < a$, $t < r$; fig. 1.1b). On appelle Σ la **surface moyenne** et t l'**épaisseur**. Les surfaces engendrées par les extrémités B et C du segment normal, qui limitent l'élément structural selon l'épaisseur, sont appelées faces (ou surfaces) extrêmes, supérieure et inférieure, extérieure et intérieure, voire avant et arrière, selon les cas.

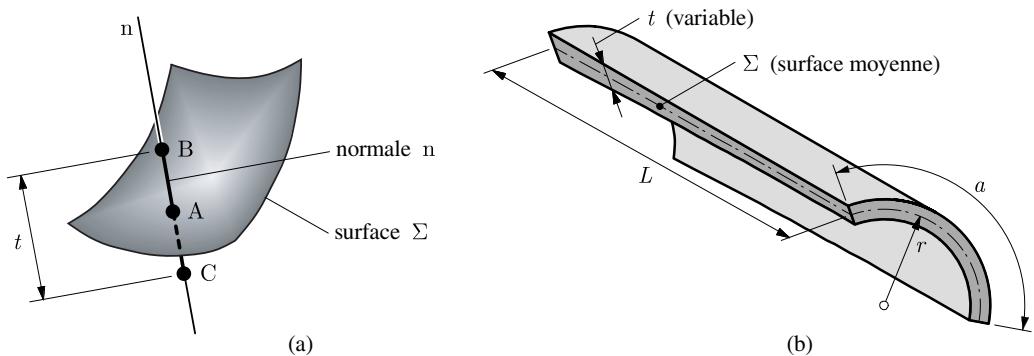


Fig. 1.1 Élément structural mince (t est l'épaisseur) : (a) surface moyenne Σ et sa normale ; (b) dimensions caractéristiques (L , a , r).

Ingénieurs et architectes conçoivent une infinie variété de structures formées d'un ou plusieurs éléments de ce genre, de sorte qu'une classification est presque impossible. On distingue, d'après la forme de la surface moyenne,

- les *coques* ou *voiles*, à surface moyenne courbe,
- les *parois* et *plaques*, à surface moyenne plane (TGC vol. 4),
- les *structures plissées*, à surface moyenne polyédrique.

La rigidité de ces structures peut être accrue par l'adjonction de raidisseurs. On parle alors de coques et plaques *nervurées* ou *raides*.

Les domaines d'utilisation couvrent tous les secteurs : réservoirs, conduites et tuyauteries, couvertures, carrosseries, fuselages d'avion, coques de navire, ponts biais ou courbes, châteaux d'eau, voûtes, barrages, silos, enceintes de réacteur, tours de refroidissement, bouteilles, murs et culées, plafelages, tunnels, etc.

Les matériaux utilisés sont le béton, l'acier et, moins fréquemment, les matériaux composites (à fibres de verre, aramide et carbone), les matières plastiques, le bois, la brique et les alliages d'aluminium.

Dans l'étude théorique des coques, la surface moyenne Σ , la normale n et le segment BC jouent un rôle essentiel. Dans la suite, on désigne par *normale* tant le segment que la droite qui le porte. Le segment correspond, dans la théorie des coques, à la *section droite* dans la théorie des poutres de Bernoulli.

Pour éviter de recourir à une analyse de solide tridimensionnel, l'objectif de toute théorie de coque est de tirer parti de la minceur de l'élément structural défini ci-dessus : sa réponse peut en effet être ramenée à l'étude bidimensionnelle de sa surface moyenne, complétée de règles dictant le comportement des normales. L'analyse de la surface moyenne est donc importante et ce chapitre est avant tout consacré à l'étude des surfaces : rappel de propriétés géométriques (sect. 1.2), description de formes utilisées en construction (sect. 1.3 à 1.6) et relations analytiques (sect. 1.7).

1.2 Géométrie de la surface moyenne

1.2.1 Définition

Dans un système d'axes cartésiens droit (X, Y, Z) , les équations paramétriques

$$X = X(\alpha, \beta) \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad Z = Z(\alpha, \beta) \quad (1.1)$$

définissent une surface Σ . A toute valeur constante C_β du paramètre β correspond une ligne sur la surface, dite *ligne de coordonnée* α ; de même, $\alpha = C_\alpha$ définit une ligne de coordonnée β . L'ensemble forme les *lignes de coordonnées* et (α, β) sont les *coordonnées curvilignes* de la surface (fig. 1.2).

Si les paramètres α et β peuvent être éliminés des équations (1.1), on obtient la *forme explicite*

$$Z = Z(X, Y) \quad (1.2)$$

La surface peut, semblablement, être définie (de façon vectorielle et paramétrique) par le vecteur

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{x}(\alpha, \beta) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

où \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 sont les vecteurs unités dans (X, Y, Z) .

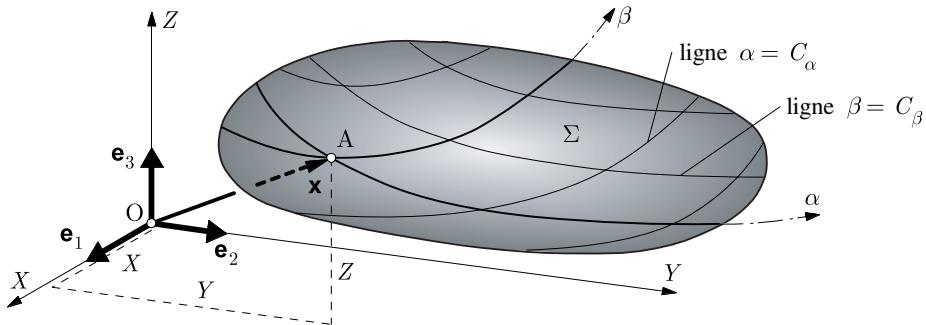


Fig. 1.2 Surface et ses lignes de coordonnées.

1.2.2 Courbure normale

Soit n la normale élevée au point A d'une surface Σ (fig. 1.3). On dit qu'un plan P contenant n réalise une *section normale* de la surface ; cette section se traduit par une *courbe plane* ν tracée sur Σ . Au point A de cette courbe, on désigne par r_n le rayon de courbure ; son inverse $1/r_n$ est la *courbure normale*.

Lorsque le plan P tourne autour de n , r_n et $1/r_n$ varient entre deux valeurs extrêmes appelées *rayons de courbure principaux* r_{\max} et r_{\min} et *courbures principales* $1/r_{\min}$ et $1/r_{\max}$; les plans P correspondants sont perpendiculaires.

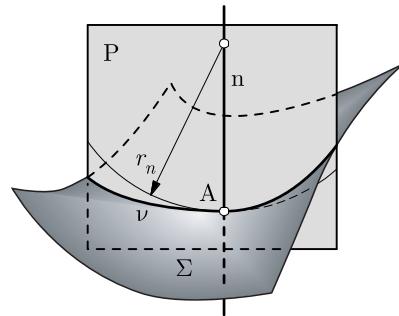


Fig. 1.3 Courbe ν , de courbure normale $1/r_n$ au point A, section normale de la surface Σ par le plan P .

La trace de ces deux plans dessine, au voisinage immédiat du point A, une petite croix sur la surface Σ . Les bras de cette croix sont les *directions principales* ; les courbes enveloppes de ces directions, en tous les points de Σ , constituent un réseau orthogonal de deux familles de lignes, les *lignes de courbure principale* ou, simplement, les *lignes de courbure*.

1.2.3 Lignes de courbure

Le réseau des lignes de courbure d'une surface peut être utilisé avantageusement comme système de lignes de coordonnées curvilignes (α, β) pour exprimer les équations des coques (chap. 2). Outre

l'orthogonalité, ce réseau possède la propriété essentielle suivante : le long d'un tronçon ds_α (ou ds_β) d'une ligne de courbure, la normale reste dans le plan contenant la section normale et passe par le centre de courbure de ce tronçon (fig. 1.4). Grâce à cette propriété, on peut isoler un fragment de coque d'épaisseur t par des *sections droites*, c'est-à-dire des coupes *planes* et *normales* à la surface moyenne.

Seules les lignes de courbure présentent cette particularité ; sur une autre ligne, la normale tourne autour de la ligne, traduisant la *torsion* de cette ligne.

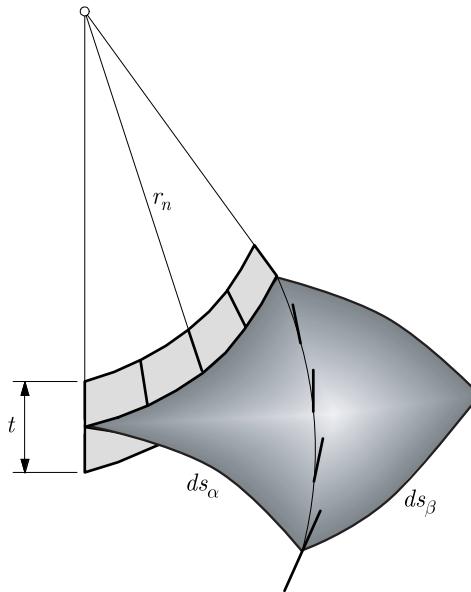


Fig. 1.4 Élément de surface limité par des lignes de courbure ; le long d'un côté, la normale reste dans le plan de la section normale ; pour toute autre ligne, la normale tourne autour de la ligne.

1.2.4 Propriétés géométriques

En un point d'une surface, la *courbure de Gauss* K , ou *courbure totale*, est le produit des courbures principales

$$K = \frac{1}{r_{\max} r_{\min}} \quad (1.4)$$

et la *courbure moyenne* H est simplement

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{\max}} + \frac{1}{r_{\min}} \right) \quad (1.5)$$

Dans une surface à *simple courbure*, l'une des courbures principales est nulle et $K = 0$ (cône par exemple ; fig. 1.5). Dans une surface à *double courbure*, les deux courbures principales sont non nulles ; si elles sont de même signe, ou de signe contraire, la surface est dite à courbure de Gauss *positive* (paraboloïde de révolution par exemple), ou *négative* (paraboloïde hyperbolique par exemple).

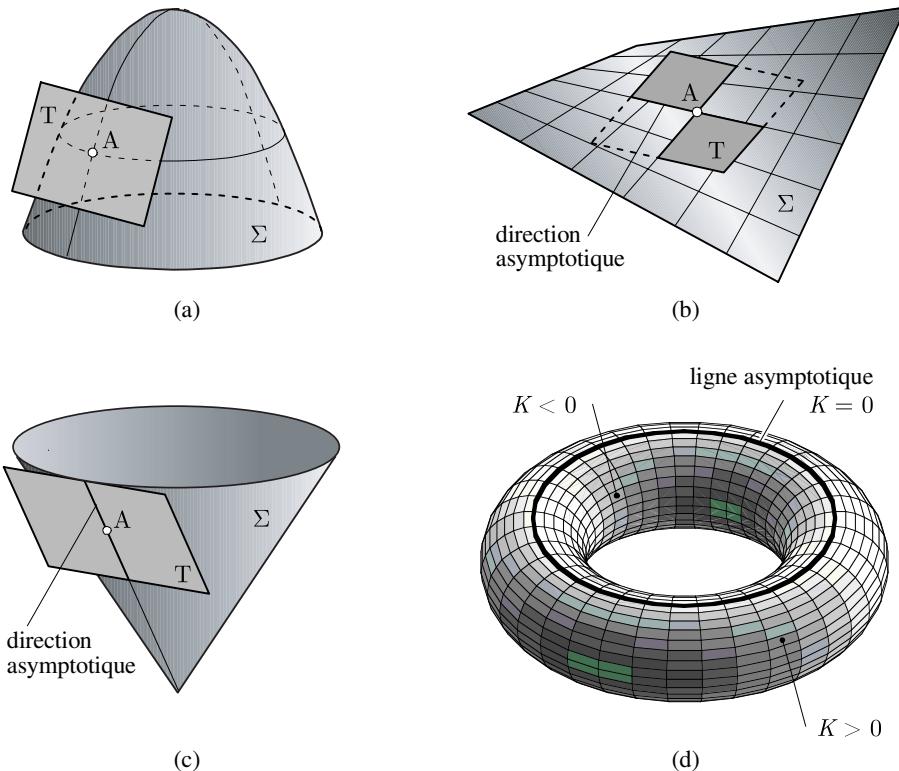


Fig. 1.5 Surfaces diverses selon la valeur de la courbure de Gauss K : (a) paraboloïde de révolution (cas elliptique, $K > 0$) ; (b) paraboloïde hyperbolique (cas hyperbolique, $K < 0$) ; (c) cône (cas parabolique, $K = 0$) ; (d) tore ($K \geq 0$ et $K \leq 0$).

Certaines surfaces ont des zones à courbure totale positive, nulle ou négative (tore par exemple). Il convient donc d'examiner cette notion de manière plus locale. Soit T le plan tangent au point A d'une surface Σ . Localement, trois cas sont possibles (fig. 1.5) :

- la surface Σ reste située d'un seul côté de T , ne coupe pas T : le point A est dit *elliptique* (si l'on coupe Σ par un plan parallèle à T , très voisin de T , la section est, en première approximation, une ellipse) ; la courbure totale K est positive ; pour toute *section normale* par A , la courbure normale $1/r_n$ ne change pas de signe ;
- la surface Σ coupe T et se situe des deux côtés de T : le point A est dit *hyperbolique* et la courbure totale est négative ; l'intersection de Σ avec T se fait selon deux directions dites *asymptotiques* ; les directions principales en sont les bissectrices ; la courbure normale $1/r_n$ change de signe, s'annulant le long des directions asymptotiques ;

- la surface Σ et le plan T ont une ligne en commun, définissant une direction asymptotique ; le point A est dit *parabolique* et la courbure de Gauss est nulle ; la courbure normale ne change pas de signe, s'annulant une seule fois, sur la direction asymptotique.

Une surface est dite *minimale* si sa courbure moyenne H est nulle ; si $H = 0$, les rayons principaux de courbure sont opposés et la courbure totale K est négative. D'intérêt particulier sont les surfaces d'*aire minimale* pour un contour donné ; ce sont des surfaces minimales et on peut les matérialiser par une bulle de savon tendue sur un fil de fer épousant le contour (hélicoïde et caténoïde par exemple ; fig. 1.6).

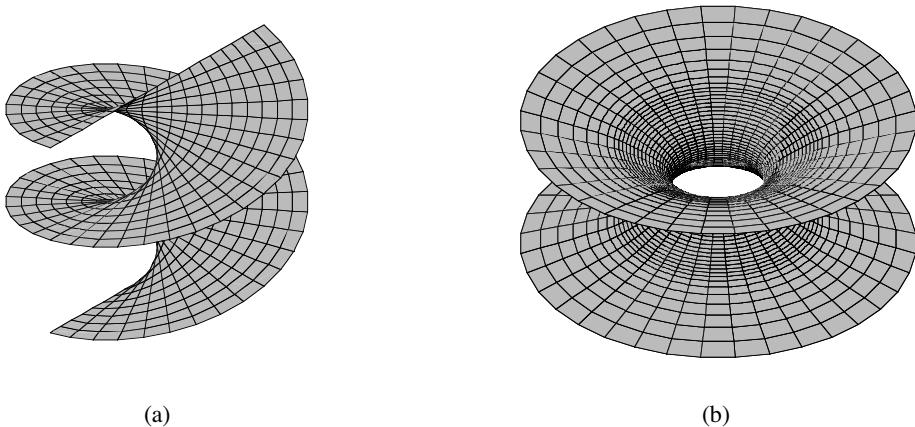


Fig. 1.6 Surfaces minimales d'aire minimale : (a) hélicoïde (surface réglée) ; (b) caténoïde (ou alysséide), surface de révolution engendrée par la rotation de la chaînette.

Une surface est *réglée* si elle est engendrée par une droite, la *génératrice*, dont le déplacement n'est fonction que d'un seul paramètre, par exemple une droite s'appuyant sur trois courbes quelconques, ou encore sur deux courbes et parallèle à un plan. La courbure de Gauss K d'une surface réglée est négative ou nulle (hyperboloïde de révolution par exemple ; fig. 1.13).

Une surface est *développable* si elle peut être appliquée sur un plan sans déchirure ni superposition. Sa courbure totale est en tout point nulle. Toute surface issue de la déformation d'un plan (sans l'étirer ni le contracter) est développable.

Pour qu'une surface réglée soit développable, le plan tangent doit être le même en tous les points d'une génératrice. Les surfaces développables sont réglées : ce sont les cônes, cylindres et lieux des tangentes à une courbe gauche.

Si, en un point d'une surface, les deux courbures principales sont égales ($1/r_{\max} = 1/r_{\min}$), ce point est dit *sphérique* ou *ombilical*.

Enfin, sur une surface, on peut trouver trois types de lignes remarquables. Les *lignes de courbure*, enveloppes des directions principales (§ 1.2.3), les *lignes asymptotiques*, lignes de courbure normale $1/r_n$ nulle (certaines surfaces en sont dépourvues, la sphère par exemple) et les *lignes géodésiques*,

lignes de plus courte distance entre deux points (l'hélice, sur un cylindre, par exemple). Si une surface est pourvue de lignes droites, ces dernières sont à la fois des asymptotiques et des géodésiques.

1.2.5 Théorème de Meusnier et formule d'Euler

Soit une ligne quelconque λ tracée sur une surface Σ . Au point A (fig. 1.7), on trace la tangente t et la normale principale N à λ ; sur N se trouve le rayon de courbure ρ de λ en A (Frenet, § 1.7.6). En A toujours, on élève la normale n à Σ ; le plan P formé de n et t coupe Σ selon la ligne ν de courbure normale $1/r_n$ (section normale). Si μ est l'angle entre n et N , le *théorème de Meusnier* (1776)

$$\rho = r_n \cos \mu \quad (1.6)$$

exprime les propriétés suivantes :

- le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface est la projection, sur la normale principale, de celui de la section normale correspondante ;
- à toutes les courbes tracées sur une surface, ayant une tangente commune en un point, correspond la même courbure normale $1/r_n$ en ce point.

Ce théorème, démontré plus loin (§ 1.7.7), rappelle, en particulier, que les courbures principales $1/r_{\min}$ et $1/r_{\max}$ ne sont pas nécessairement les courbures des lignes de courbure, mais bien les courbures des sections normales. Ainsi, sur une sphère de rayon a , un parallèle de rayon b est une ligne de courbure principale (fig. 1.8). Sa courbure vaut $1/b$ et sa courbure normale $1/a$, avec (Meusnier)

$$b = a \cos \mu \quad (1.7)$$

ou, en utilisant la colatitude φ ,

$$b = a \sin \varphi \quad (1.8)$$

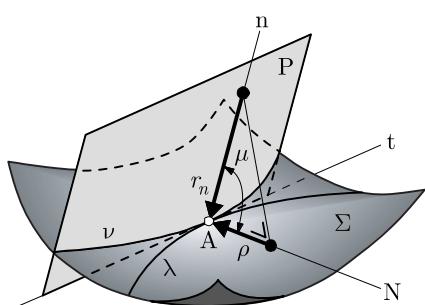


Fig. 1.7 Courbure et courbure normale (Meusnier).

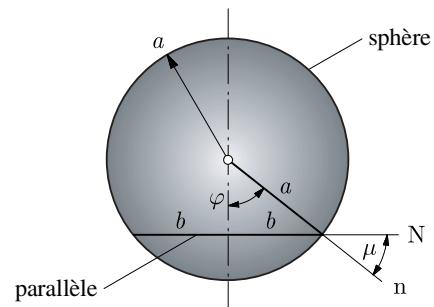


Fig. 1.8 Théorème de Meusnier dans la sphère.

Dans le plan tangent T au point A d'une surface Σ , orientons le plan P d'une section normale quelconque par l'angle γ compté à partir de la direction principale associée à r_{\max} (fig. 1.9). La *formule d'Euler* (1760) donne, en fonction de γ , la courbure $1/r_n$ de la section normale ν par

$$\frac{1}{r_n}(\gamma) = \frac{1}{r_{\max}} \cos^2 \gamma + \frac{1}{r_{\min}} \sin^2 \gamma \quad (1.9)$$

où les trois rayons de courbure sont mesurés au point A .

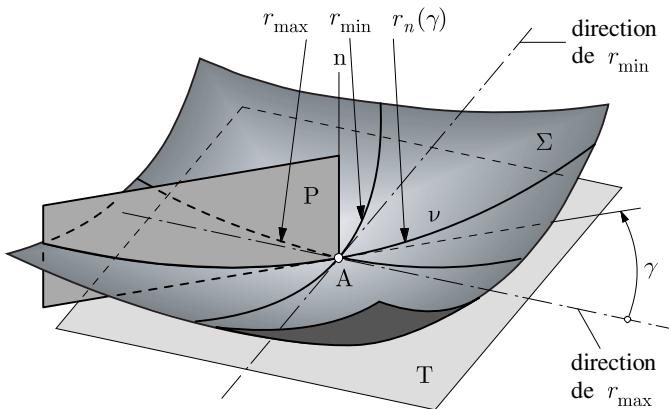


Fig. 1.9 Courbure d'une section normale quelconque de Σ en A .

1.3 Etat membranaire et état flexionnel

L'état de contrainte, par lequel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par des *efforts intérieurs* définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la *ligne moyenne*. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

L'**état membranaire** s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les *efforts normaux* et les *efforts tangentiels*. L'**état flexionnel** regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les *moments de flexion*, les *moments de torsion* et les *efforts tranchants*.

Selon le mode de travail, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux :

- l'élément de *paroi* est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur ; sollicité par des charges agissant dans son plan moyen, il y résiste par un *état membranaire* (fig. 1.10a) ; les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte (TGC vol. 3, § 5.6.1) ;
- l'élément de *plaque* est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen) ; il résiste aux charges agissant normalement à son plan moyen par un *état flexionnel* (fig. 1.10b ; TGC vol. 4) ;

- l'élément de **plaque-membrane** est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état *membranaire* de paroi et l'état *flexionnel* de plaque (fig. 1.10c); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des *structures plissées*;
- enfin, l'élément structural de *coque* est, par nature, courbe et spatial; il utilise les deux états d'efforts intérieurs, *membranaire* et *flexionnel*, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (fig. 1.10d); exceptionnellement, grâce à sa courbure, une coque peut ne résister aux charges que par l'état membranaire (§ 3.2.4; structure gonflable, textile, peau, etc.).

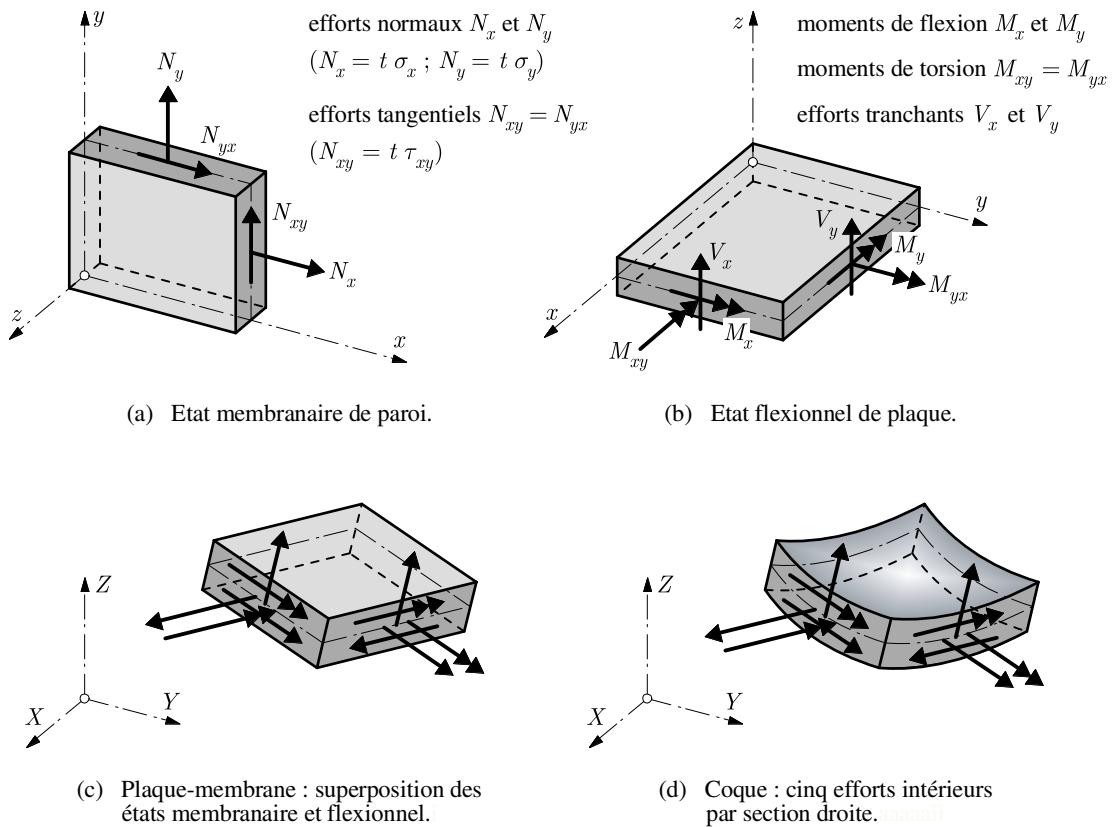


Fig. 1.10 Efforts intérieurs.

Remarques

L'état de contrainte d'une coque est étudié rigoureusement au chapitre 2; il s'agit ici d'une présentation intuitive.

L'élément structural plaque-membrane est aussi appelé *élément plan de coque*.

La présence de raidisseurs peut modifier considérablement le mode de travail d'un élément structural ; par exemple, les sommiers ajoutés sous une plaque (dalle nervurée) transforment le comportement de plaque en celui d'une structure plissée (fig. 1.11).

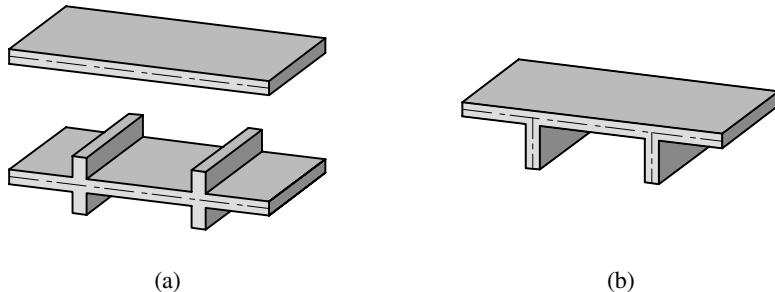


Fig. 1.11 Effet des raidisseurs :

- (a) plaque et plaque nervurée (avec raidisseurs centrés) : état flexionnel seul ;
- (b) structure plissée (plaqué avec raidisseurs excentrés) : états membranaire et flexionnel.

1.4 Coques

Une coque est définie par la géométrie courbe de sa surface moyenne et par son épaisseur en tout point de cette surface. En outre, pour l'ingénieur, il convient de caractériser les matériaux constituant la coque, les conditions d'appui et les actions.

On s'intéresse ici à la surface moyenne. En particulier, on discute les nombreuses *formes géométriques* possibles de cette surface. Le choix, important, de la bonne forme est en premier lieu gouverné par *la fonction que la coque doit remplir*.

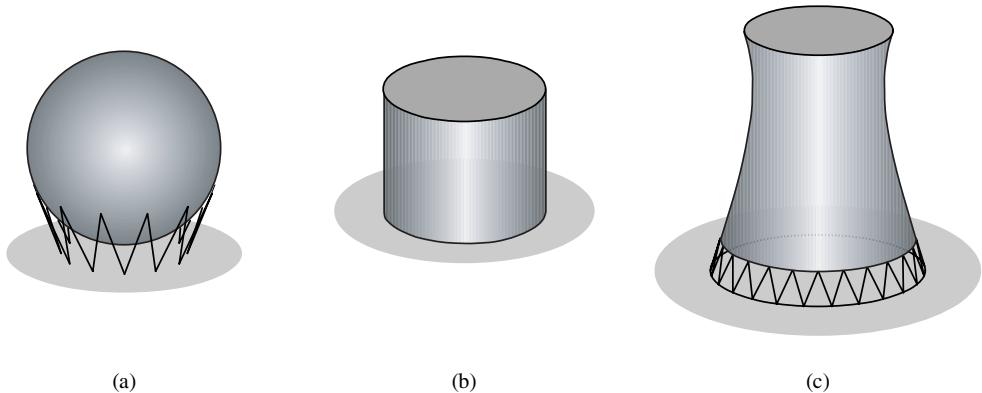


Fig. 1.12 Surfaces de révolution : (a) réservoir sphérique (double courbure $K > 0$) ;

(b) réservoir cylindrique (simple courbure $K = 0$) ;

(c) tour de refroidissement (hyperboloïde, double courbure $K < 0$).

1.4.1 Surfaces géométriques

La géométrie des surfaces offre un grand éventail de formes simples. Parmi les *surfaces à simple courbure*, le cône et surtout le cylindre sont très utilisés (réservoirs, silos, châteaux d'eau, récipients sous pression, conduites forcées, fusées, etc.). Les *surfaces de révolution*, obtenues par rotation d'une courbe plane, le *méridien*, autour d'un axe situé dans le plan de la courbe, sont également d'un emploi très fréquent (fig. 1.12).

Les *surfaces réglées* résultent du déplacement d'une droite, la génératrice, selon une certaine loi (§ 1.2.4) ; on peut ainsi engendrer des surfaces diverses à simple ou double courbure, dont la plus connue est le paraboloïde hyperbolique (fig. 1.13).

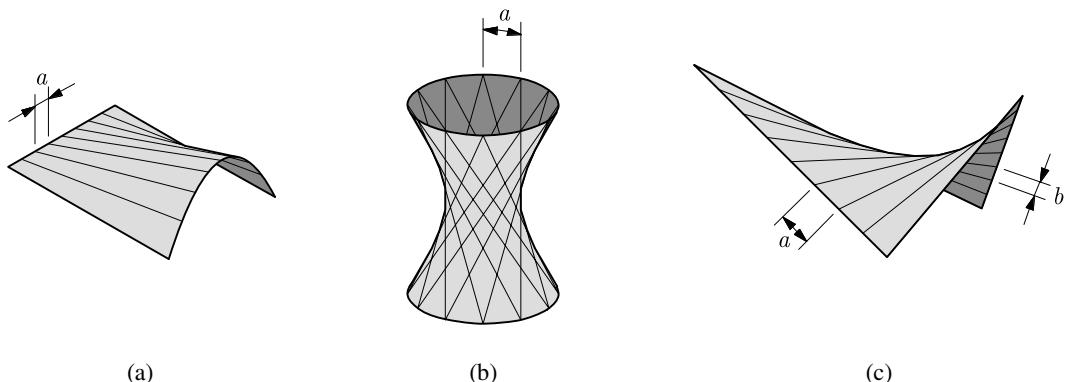


Fig. 1.13 Surfaces réglées : (a) conoïde ($K = 0$) ; (b) hyperboloïde à une nappe ($K < 0$) ;
(c) paraboloïde hyperbolique ($K < 0$).

L'intérêt de l'utilisation des surfaces réglées est essentiellement technique. Si la coque est en béton, le coffrage est réalisé au moyen de planches rectilignes étroites disposées selon les génératrices ; en bois, elle peut être formée d'un réseau de planches croisées clouées.

Les *surfaces cylindriques, ouvertes ou fermées*, sont obtenues en déplaçant une droite, la *génératrice*, parallèlement à elle-même sur une courbe plane, la *directrice*. La *voûte autoportante*, par exemple, est d'usage courant comme couverture ; elle est supportée par des *diaphragmes* (tympons, entretoises, raidisseurs) situés au niveau des appuis (fig. 1.14).

Les *surfaces de translation* résultent du déplacement d'une courbe plane, la génératrice, sur une autre, la directrice (fig. 1.15).

Les surfaces géométriques, présentées brièvement ici, ont l'avantage de pouvoir être décrites analytiquement. Elles ne sont toutefois pas l'unique ni nécessairement le meilleur choix pour la surface moyenne d'une coque. Ces formes simples risquent de ne pas s'adapter à des exigences particulières, par exemple à certaines charges, aux conditions géométriques ou statiques au contour (conditions aux limites), à la résistance au voilement, etc.

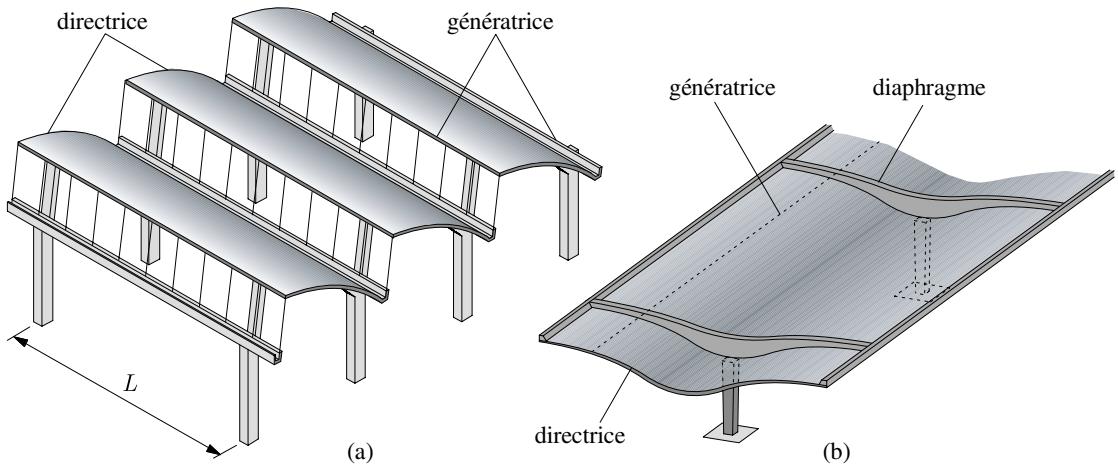


Fig. 1.14 Surfaces cylindriques ouvertes ($K = 0$) dites voûtes autoportantes :
(a) sheds (voûtes à simple portée L); (b) abri (voûte continue).

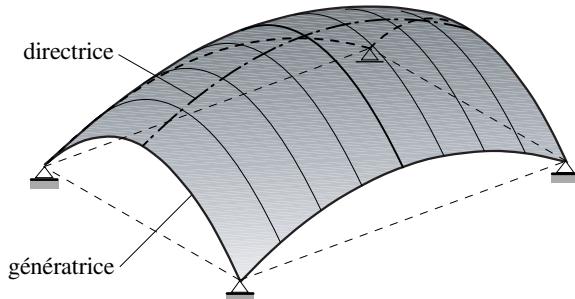
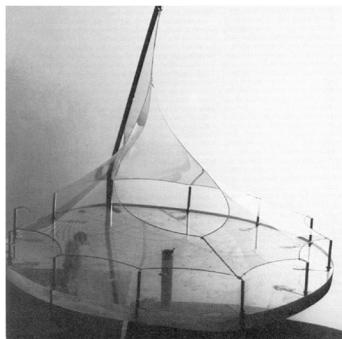


Fig. 1.15 Surface de translation ($K > 0$) utilisée comme couverture.

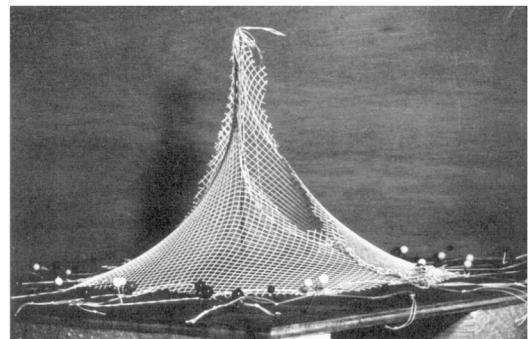
1.4.2 Surfaces expérimentales

D'autres surfaces intéressantes et souvent très fonctionnelles peuvent s'obtenir par des techniques expérimentales. La plupart d'entre elles recourent à des matières souples (sans résistance flexionnelle) adaptant leur forme à la charge appliquée, en sorte que la résistance résulte essentiellement d'un état membranaire.

Un film d'eau savonneuse tendu sur les bords matérialisés (fil de fer, élastique, etc.) du modèle réduit de la coque (fig. 1.16a), par exemple, permet, selon les conditions aux bords, une liberté de formes sans limite ; la surface correspondante est d'aire minimale (§ 1.2.4). Une technique voisine consiste à mettre en tension, entre leurs supports, des membranes, filets ou tissus souples (fig. 1.16b). La surface en goutte, remarquable, est obtenue par remplissage d'une enveloppe souple dont la forme s'adapte à la quantité de matière contenue (silos de stockage ; fig. 1.17). On parle, dans ces divers cas, de *structures tendues*.



(a)



(b)

Fig. 1.16 Maquettes pour l'étude des formes (pavillon de l'Allemagne, Expo 1967, Montréal) :
 (a) bulle de savon ; (b) tissu.

(Source : *IL8 – Netze in Natur und Technik*, K. Bach Red., Mit. des IL, Univ. Stuttgart, 1975.)

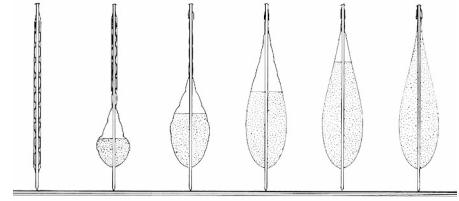
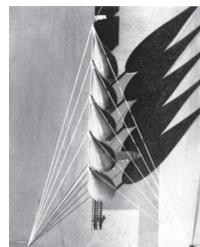
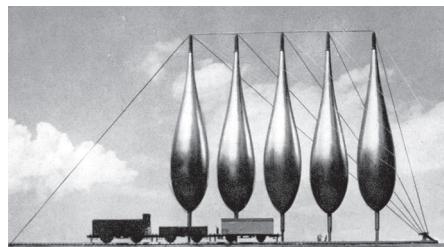
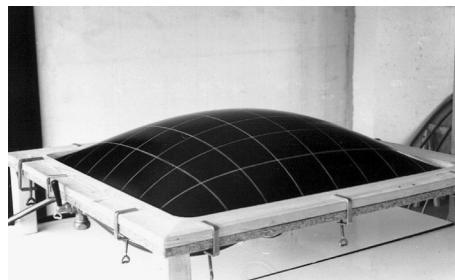


Fig. 1.17 Projet de silos en enveloppe souple. (Source : F. Otto, *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Band 1, Ullstein Verlag, Frankfurt/M - Berlin, 1962.)



(a)



(b)

Fig. 1.18 Coques de forme pneumatique :

(a) maquette d'une membrane en caoutchouc sous pression d'air ;

(b) réalisation de coques à base rectangulaire 18 m × 24 m.

(Source : H. Isler, ingénieur ETHZ, Berthoud.)

Une membrane élastique tendue sur un cadre rigide et soumise à une pression uniforme conduit également à des formes très variées selon la géométrie de la base (fig. 1.18a). Gonflée et en vraie grandeur, elle peut servir de coffrage à une coque en béton (dômes ; fig. 1.18b). Soumise à une pression hydrostatique, la membrane peut donner la forme idéale pour un barrage voûte.

Les membranes, filets ou tissus souples, suspendus entre les appuis, enduits d'une matière liquide (plâtre, polyester, etc.) durcissant une fois la position d'équilibre réalisée, puis retournés (fig. 1.19), fournissent les meilleures formes possibles pour résister au poids propre par compression membranaire (couvertures en béton sous charge de gravité, déterminante pour le dimensionnement).

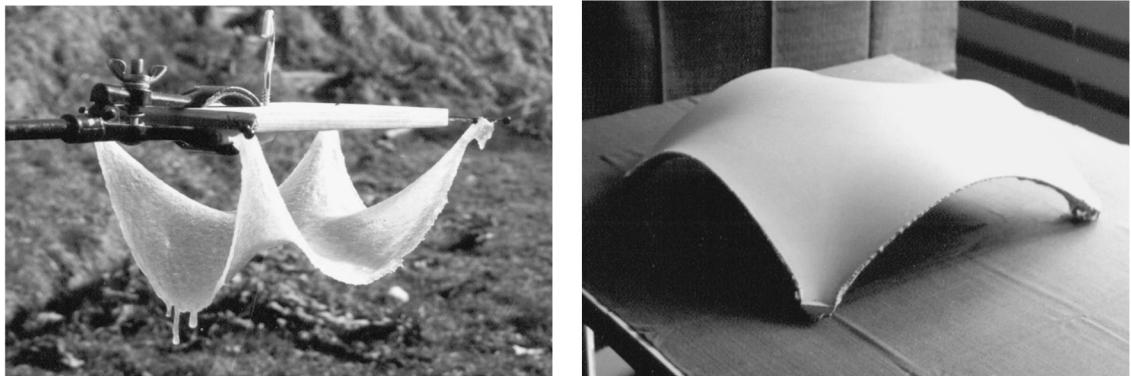


Fig. 1.19 Modèles de coque appuyée sur quatre points, obtenus d'un tissu trempé dans du polyester, solidifié et retourné. (Source : H. Isler, ingénieur ETHZ, Berthoud.)

Convaincu de l'efficacité de la méthode des toiles pesantes rigidifiées inversées, dont il est l'initiateur (1955), l'ingénieur suisse H. Isler l'utilise intensivement et avoisine la perfection technique et esthétique dans la réalisation des couvertures les plus diverses. Sa démarche expérimentale propre, prise comme un jeu créatif et propice à de nouvelles idées de conception, lui permet de trouver des formes de coques inédites et de proportions idéales. La richesse des formes, la légèreté et la beauté de ses coques, témoignent de la valeur de sa démarche (fig. 1.20).

Dans tous ces procédés expérimentaux de recherche de formes, cependant, le relevé topographique du modèle, qui doit être très précis, est une opération délicate à mener. Il est possible de s'y soustraire en simulant les expériences par un calcul sur ordinateur.

De plus, la surface moyenne obtenue échappe à toute représentation analytique et, par suite, à toute méthode classique de résolution analytique qui pourrait en dépendre. Seules les méthodes numériques (éléments finis ; chap. 11) ou expérimentales (essais sur modèle) permettent d'étudier les coques de forme quelconque.

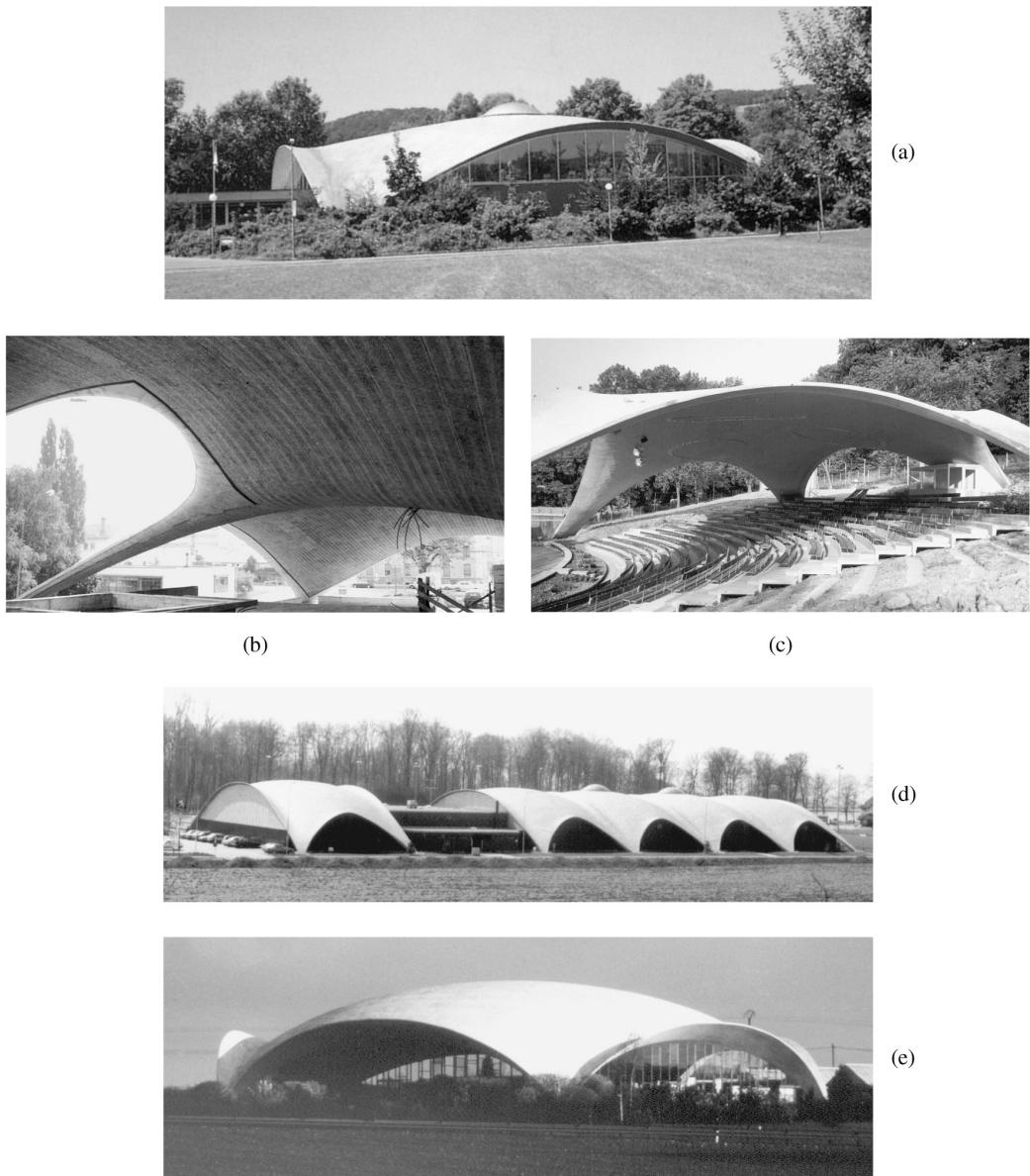


Fig. 1.20 Coques en béton réalisées par Heinz Isler : (a) coque sur quatre appuis, 35 m × 35 m, épaisseur 9 à 10 cm (piscine de Brugg, 1981) ; (b) coque sur sept appuis, à base irrégulière 57,5 m × 34,5 m, épaisseur 10 cm (Sicli S.A., Genève, 1969) ; (c) coque sur cinq appuis à différents niveaux, 28 m × 42 m (théâtre en plein air, Grötzingen bei Stuttgart, 1977) ; (d) coques à base rectangulaire 18,4 m × 48 m accolées (halle de tennis, Marin-La Thène vers Neuchâtel, 1983) ; (e) coque sur cinq appuis, exemple de forme non suspendue mais dite coulée (centre horticole, Florélites Clause, Paris, 1975). (Source : H. Isler, ingénieur ETHZ, Berthoud.)

1.5 Structures plissées

Les structures plissées sont constituées d'un assemblage d'éléments structuraux plans, de type *plaqué-membrane*, réalisant une structure portante stable. La jonction de deux éléments plans forme une *arête* selon laquelle la liaison est presque toujours *rigide*, pour des raisons techniques évidentes.

La *surface moyenne* d'une structure plissée est une sorte de surface polyédrique à facettes multiples. La plus simple est une surface prismatique à facettes rectangulaires, la *coque prismatique*, très courante en pratique ; elle est formée d'une série de *panneaux* rectangulaires, généralement allongés, supportés transversalement par des diaphragmes au droit des appuis (fig. 1.21).

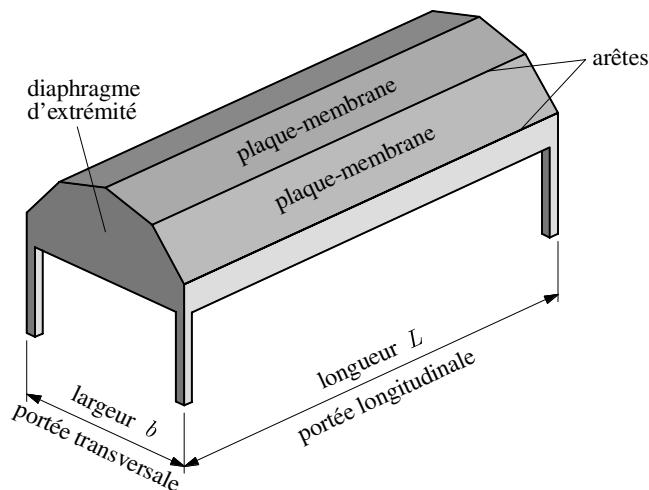


Fig. 1.21 Coque prismatique ouverte.

La coupe transversale d'une coque prismatique est une *section droite à parois minces*, ouverte ou fermée (fig. 1.22) ; toute structure engendrée par le déplacement d'une telle section le long d'une droite est ainsi une coque prismatique (toiture, platelage, plancher, pont, poutre, etc.). La présence d'entretoises intermédiaires, pour garantir la conservation de la forme de la section droite, permet souvent de calculer les plus allongées de ces coques comme de simples poutres.

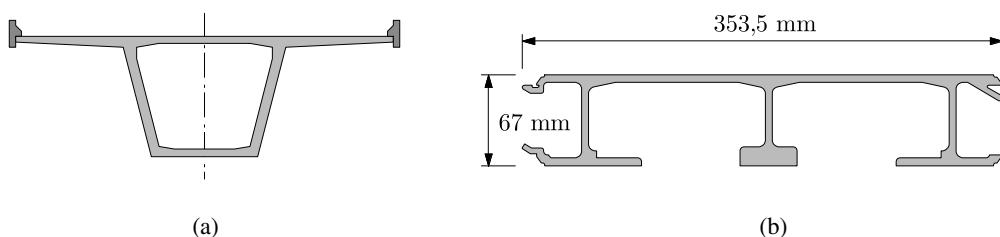
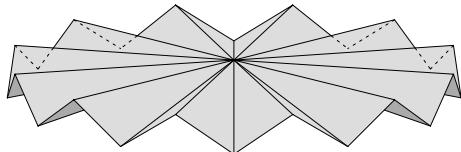
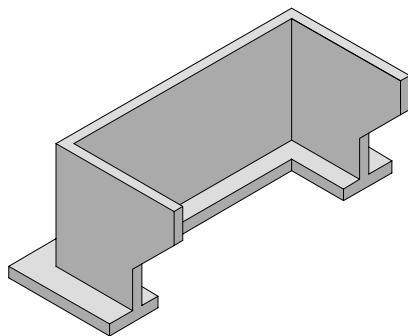


Fig. 1.22 Coupes transversales de coques prismatiques : (a) pont-caisson en béton armé ; (b) platelage en aluminium du pont suspendu de Montmerle, France (source : R. Paubel, *Le pont suspendu de Montmerle*, Revue de l'Aluminium, juillet-août 1974).

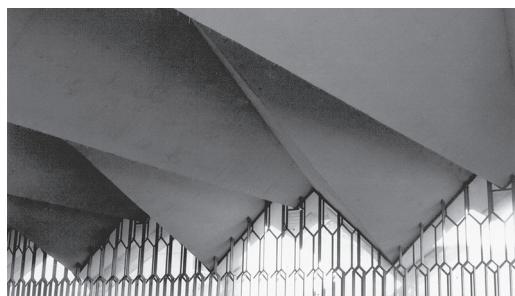
De façon plus générale, l'utilisation de panneaux plans à bords non parallèles permet de réaliser des structures portantes les plus diverses (couvertures, bâtiments, murs de soutènement, ponts-caissons biais, culées de ponts, silos, etc. ; fig. 1.23).



(a)



(b)



(c)

Fig. 1.23 Structures plissées : (a) toiture circulaire (esquisse) ; (b) culée de pont (esquisse) ; (c) église St-Pierre et St-Paul, Droixhe, Liège (vues extérieure et intérieure ; photos F. Frey).

1.6 Autres structures

Il est évidemment possible d'envisager d'autres constructions formées d'éléments structuraux à parois minces, qui sortent du cadre traité jusqu'ici.

D'autres types de *structures plissées*, par exemple, sont composés d'éléments à surface moyenne courbe et reliés par des arêtes curvilignes, ou d'un mélange de panneaux courbes et plans. Ce genre de structures est très fréquent en pratique (coupoles diverses, ponts courbes, trémies des silos, vannes, barrages à voûtes multiples, etc. ; fig. 1.24).

Des structures composées, formées d'un assemblage de *coques* et de *plaques-membranes*, sont également très répandues ; les structures les plus diverses et les plus complexes résultent des exigences modernes de la technique (fondation des tours de télévision, bâtiment des réacteurs nucléaires, plate-forme pétrolière, carcasse des véhicules sur rail, fuselage des avions, coque des navires ; fig. 1.24).

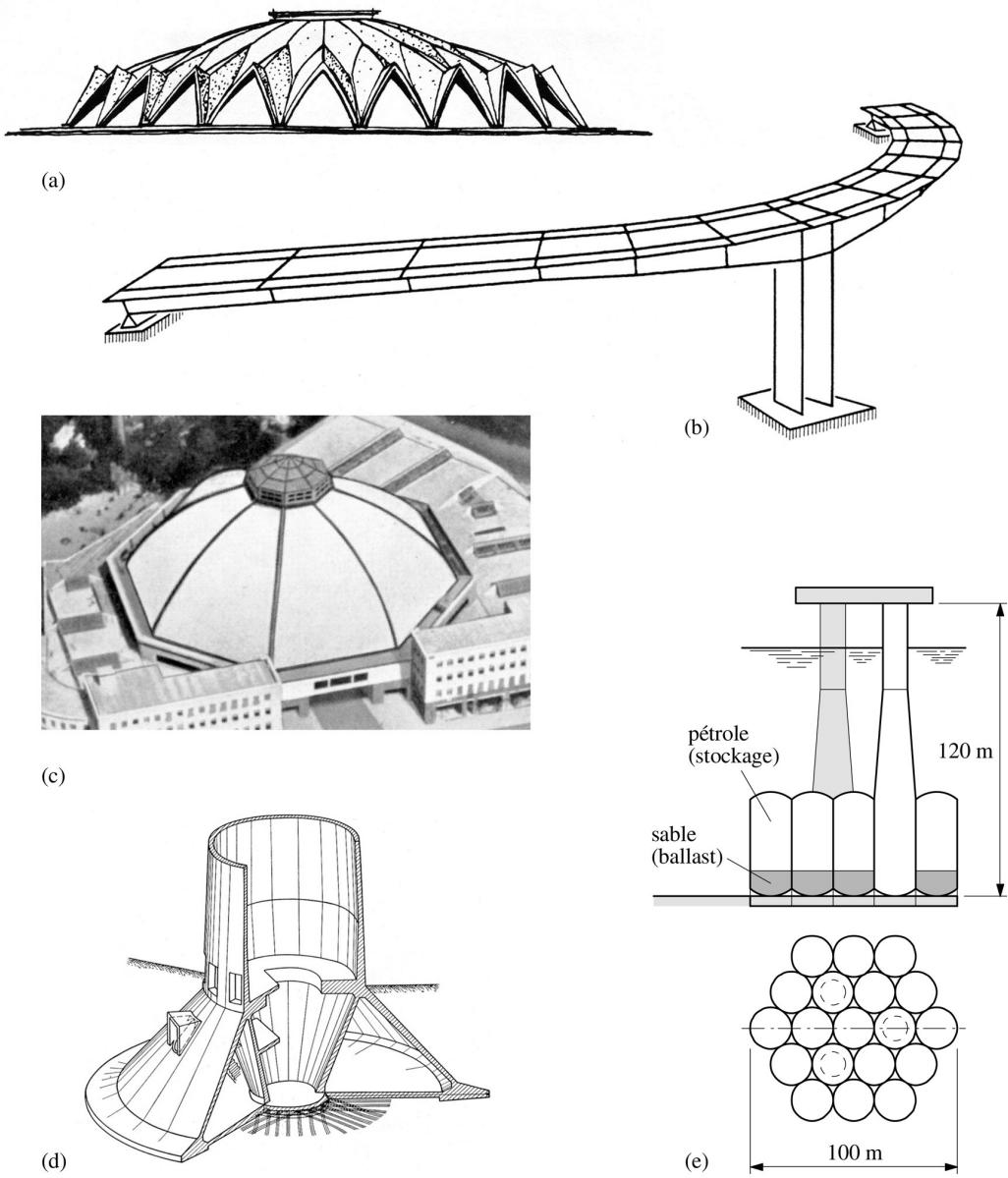


Fig. 1.24 Structures à parois minces diverses : (a) projet de marché couvert à Moscou (esquisse) ; (b) pont-caisson courbe, Barboleusaz, Suisse (discrétisation) ; (c) coupole polygonale régulière, Markthalle, Bâle, 1929 (source : J. Joedicke, *Les Structures en Voiles et Coques*, Editions Vincent, Fréal et Cie, Paris, 1962) ; (d) fondation de la tour de télévision de Stuttgart (source : F. Leonhardt, *Der Stuttgarter Fernsehturm, Beton- und Stahlbetonbau*, 51 (1956) 4/5) ; (e) plate-forme offshore norvégienne *condeep* (esquisse).

1.7 Analyse des surfaces

1.7.1 Introduction

Cette section rappelle, brièvement, quelques relations importantes de la théorie des surfaces, exprimées selon les lignes de courbure principale. On consultera les ouvrages spécialisés (voir par exemple la bibliographie) pour une vue détaillée, des démonstrations complètes et une présentation rigoureuse.

On choisit la représentation paramétrique vectorielle (§ 1.2.1)

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha, \beta) \quad (1.10)$$

pour décrire une surface Σ dans l'espace. Les paramètres α et β sont les *coordonnées curvilignes* sur Σ ; les lignes $\alpha = \text{cste}$ et $\beta = \text{cste}$ sont les *lignes de coordonnées* sur Σ .

On adopte les *lignes de courbure (principale)* comme lignes de coordonnées : elles forment un réseau orthogonal sur la surface (§ 1.2.2 et 1.2.3).

1.7.2 Vecteurs unités attachés à la surface

Les vecteurs

$$\mathbf{x}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \quad \mathbf{x}_{,\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \quad (1.11)$$

sont tangents aux lignes de coordonnées et à la surface. (Par commodité, on utilise occasionnellement la notation $(\bullet)_{,\alpha}$ pour désigner la dérivée.) Les vecteurs unités tangents \mathbf{a} et \mathbf{b} sont (fig. 1.25)

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x}_{,\alpha}}{\|\mathbf{x}_{,\alpha}\|} = \frac{\mathbf{x}_{,\alpha}}{A} \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}_{,\beta}}{\|\mathbf{x}_{,\beta}\|} = \frac{\mathbf{x}_{,\beta}}{B} \quad (1.12)$$

où A et B sont les longueurs des vecteurs $\mathbf{x}_{,\alpha}$ et $\mathbf{x}_{,\beta}$ (par exemple $A^2 = \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}$).

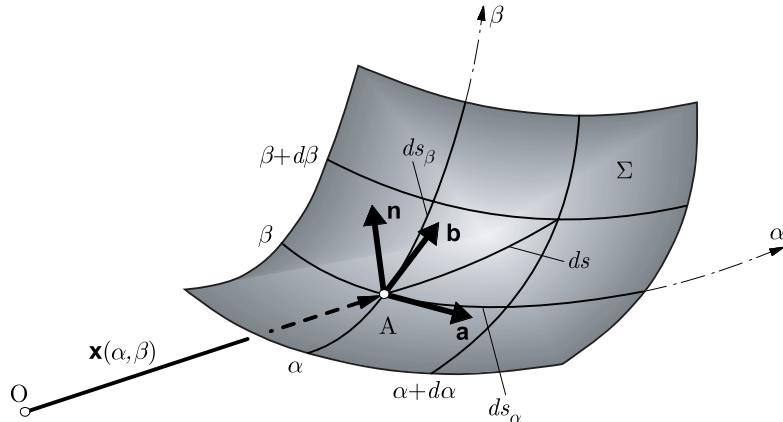


Fig. 1.25 Surface Σ et sa base orthonormée $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$.

Le vecteur unité \mathbf{n} normal à la surface est issu du produit vectoriel

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{AB} (\mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{x}_{,\beta}) \quad (1.13)$$

Les vecteurs unités \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{n} forment un repère attaché à la surface ; ils sont fonctions des paramètres α et β ; leurs dérivées par rapport à ces derniers sont données par les relations matricielles (sans démonstration)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{A}{r_\alpha} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ -\frac{A}{r_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & \frac{B}{r_\beta} \\ 0 & -\frac{B}{r_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Les matrices liant les vecteurs unités à leurs dérivées sont *antisymétriques* (propriété générale pour toute base orthonormée). Dans ces matrices, r_α et r_β sont les rayons de courbure principaux (§ 1.2.2) ; *ces rayons sont positifs si la normale unité \mathbf{n} pointe vers le centre de courbure*.

La dernière ligne de chacune des relations (1.14) montre que l'accroissement du vecteur \mathbf{n} n'a de composante que dans la section normale associée, c'est-à-dire que ce vecteur reste dans le plan des sections normales le long des arcs élémentaires tracés sur les lignes de courbure. Cette propriété n'a lieu que sur ces lignes (§ 1.2.3) et traduit le *théorème de Rodrigues*.

1.7.3 Première forme fondamentale

La différentielle

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_{,\alpha} d\alpha + \mathbf{x}_{,\beta} d\beta \quad (1.15)$$

permet de calculer le carré de la longueur de l'*élément de ligne* sur la surface

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\alpha}) d\alpha^2 + (\mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}) d\beta^2$$

Cette relation, écrite sous la forme

$$I = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \quad (1.16)$$

représente la *première forme fondamentale* de la surface. Cette forme illustre la *mesure de la distance* sur Σ . Les coefficients A et B sont les *paramètres de Lamé* (longueur de $\mathbf{x}_{,\alpha}$ et $\mathbf{x}_{,\beta}$). Il n'y a pas de terme en $\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta}$ vu l'orthogonalité des lignes de coordonnées.

Si l'élément de ligne se situe sur une ligne de coordonnée (α ou β), on a

$$ds_\alpha = A d\alpha \quad ds_\beta = B d\beta \quad (1.17)$$

et les paramètres de Lamé donnent l'accroissement de la longueur d'arc associé à l'accroissement de la coordonnée. L'élément d'aire sur Σ est

$$dA = ds_\alpha ds_\beta = AB d\alpha d\beta \quad (1.18)$$

1.7.4 Deuxième forme fondamentale

L'intersection du plan P d'une section normale avec la surface Σ est une courbe plane ν (fig. 1.26). Au point A de cette courbe d'abscisse curviligne s , on construit le vecteur tangent \mathbf{T} et le vecteur normal $\mathbf{N} \equiv \mathbf{n}$ où \mathbf{n} est la normale unité à Σ et, par Frenet, on a

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho} \quad (1.19)$$

avec $1/\rho \equiv 1/r_n$, où $1/\rho$ est la courbure de ν en A et $1/r_n$ la courbure normale.

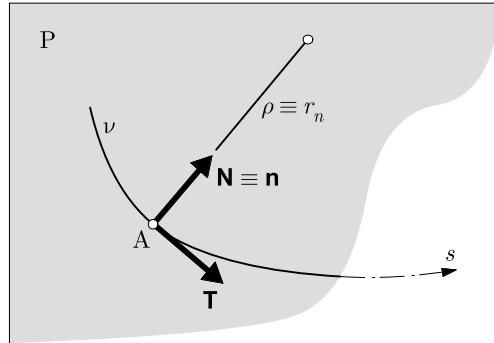


Fig. 1.26 Plan P de la section normale, avec le rayon de courbure r_n de la courbe ν .

La dérivée, par rapport à l'abscisse curviligne s de ν , du produit scalaire $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ s'écrit

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

d'où, avec l'ensemble des relations précédentes,

$$\frac{1}{r_n} = \frac{-d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n}}{ds^2} = \frac{II}{I} \quad (1.20)$$

L'expression

$$II = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n} = L d\alpha^2 + N d\beta^2 \quad (1.21)$$

est la *seconde forme fondamentale* de la surface. En l'écrivant $II = (1/r_n) ds^2$, on observe qu'elle traduit la *forme* de la surface via la courbure. Ses paramètres valent

$$L = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha} \quad N = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} \quad (1.22)$$

et, avec (1.12) et (1.14), ils deviennent

$$L = \frac{A^2}{r_\alpha} \quad N = \frac{B^2}{r_\beta} \quad (1.23)$$

1.7.5 Equations de Codazzi et Gauss

Les paramètres A , B , L et N ou, mieux, A , B , r_α et r_β , intervenant dans les deux formes fondamentales d'une surface, ne sont pas indépendants, mais liés par trois équations. Ces équations peuvent être considérées comme des conditions de compatibilité géométrique entre ces paramètres, garantissant l'existence et l'unicité de la surface.

Pour les trouver, on examine les identités existant entre les secondes dérivées mixtes des vecteurs de base. On a d'abord

$$\frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial \beta \partial \alpha}$$

d'où, avec (1.14),

$$-\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{r_\alpha} \right) \mathbf{a} - \frac{A}{r_\alpha} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{r_\beta} \right) \mathbf{b} - \frac{B}{r_\beta} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \alpha}$$

puis, encore avec (1.14),

$$\left[\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{r_\alpha} \right) \right] \mathbf{a} = \left[\frac{1}{r_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{r_\beta} \right) \right] \mathbf{b}$$

et, comme \mathbf{a} et \mathbf{b} sont perpendiculaires, on aboutit aux deux *équations de Codazzi*

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{r_\alpha} \right) = \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{r_\beta} \right) = \frac{1}{r_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (1.24)$$

Ensuite, considérant les identités

$$\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \beta \partial \alpha} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial \beta \partial \alpha}$$

et les traitant comme ci-dessus, on trouve une seule égalité nouvelle, l'*équation de Gauss*

$$-\frac{AB}{r_\alpha r_\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \quad (1.25)$$

dans laquelle apparaît la courbure de Gauss K (1.4).

1.7.6 Formules de Frenet

On peut décrire une courbe dans l'espace semblablement à une surface, par la représentation vectorielle à un paramètre

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) \quad (1.26)$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la courbe.

En tout point A de cette courbe, on construit le *repère de Frenet* (\mathbf{T} , \mathbf{N} , \mathbf{B}) par les vecteurs unités

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \mathbf{N} = \rho \frac{d\mathbf{T}}{ds} \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (1.27)$$

portés par la *tangente* \mathbf{t} , la *normale principale* \mathbf{N} et la *binormale* \mathbf{b} (fig. 1.27). Le *rayon de courbure* ρ est positif car \mathbf{N} est toujours dirigé vers le centre de courbure. Les plans construits sur les vecteurs unités sont le *plan osculateur* (\mathbf{t} , \mathbf{N}), le *plan normal* (\mathbf{N} , \mathbf{b}) et le *plan rectifiant* (\mathbf{t} , \mathbf{b}).

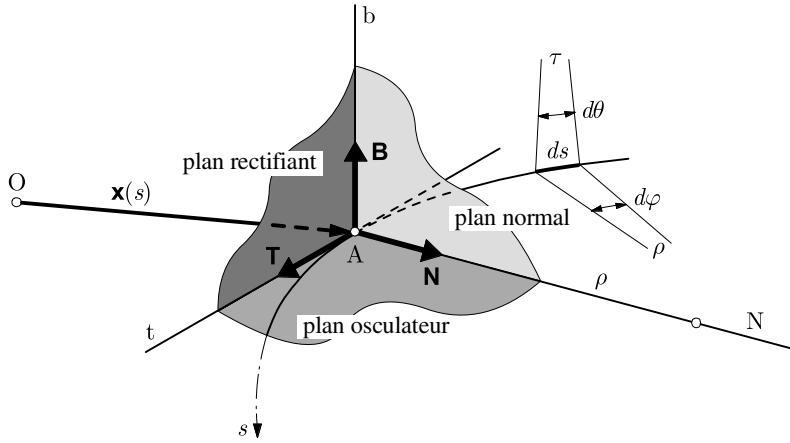


Fig. 1.27 Repère de Frenet.

Les *formules de Frenet* lient les vecteurs unités à leurs dérivées

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \quad (1.28)$$

Le rapport $1/\tau$ est la *torsion* de la courbe et τ est le *rayon de torsion*. Entre les normales principales et les binormales élevées aux extrémités d'un arc ds de la courbe apparaissent les angles $d\varphi$ et $d\theta$ (fig. 1.27) ; la courbure et la torsion sont dès lors données par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.29)$$

1.7.7 Courbure et torsion géodésiques

Repère de Darboux

Au point A d'une courbe λ quelconque tracée sur une surface Σ (fig. 1.28), on construit le *repère de Darboux* ($\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}$) où \mathbf{t} est porté par la tangente à la courbe, \mathbf{g} est normal à \mathbf{t} dans le plan tangent T à Σ en A, et \mathbf{n} est normal à Σ . Ce repère diffère de celui de Frenet d'un angle ω autour de la tangente commune ($\mathbf{t} \equiv \mathbf{T}$). On a donc, ω désignant l'angle entre le vecteur \mathbf{g} et la normale principale à la courbe λ ,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \quad (1.30)$$

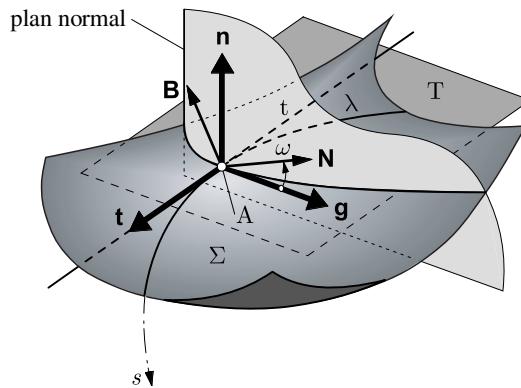


Fig. 1.28 Repère de Darboux ($\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n}$).
(Les quatre vecteurs \mathbf{g} , \mathbf{n} , \mathbf{N} et \mathbf{B} sont situés dans le plan normal.)

Si s désigne la coordonnée curviligne le long de la courbe λ , la dérivée des vecteurs unités du repère de Darboux est donnée par

$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_g} & \frac{1}{r_n} \\ -\frac{1}{r_g} & 0 & \frac{1}{t_g} \\ -\frac{1}{r_n} & -\frac{1}{t_g} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

Dans la matrice antisymétrique de (1.31), $1/r_n$ est la courbure normale (§ 1.2.2), tandis que $1/r_g$ est la *courbure géodésique* et $1/t_g$ la *torsion géodésique*.

Sachant que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

on obtient, avec (1.30) pour \mathbf{N} et (1.31) pour $d\mathbf{t}/ds$,

$$\frac{\cos \omega}{\rho} \mathbf{g} + \frac{\sin \omega}{\rho} \mathbf{n} = \frac{1}{r_g} \mathbf{g} + \frac{1}{r_n} \mathbf{n}$$

d'où, par identification,

$$\frac{1}{r_n} = \frac{\sin \omega}{\rho} \quad \frac{1}{r_g} = \frac{\cos \omega}{\rho} \quad (1.32)$$

où la première égalité est le théorème de Meusnier (§ 1.2.5, équation (1.6) avec $\cos \mu = \sin \omega$). Ces formules montrent que, dans le plan normal (contenant \mathbf{g} , \mathbf{n} , \mathbf{N} et \mathbf{B} ; fig. 1.29), les trois centres de courbure (C_ρ , C_n et C_g) sont alignés.

La courbure géodésique s'interprète comme la courbure de la projection de la ligne λ dans le plan tangent T .

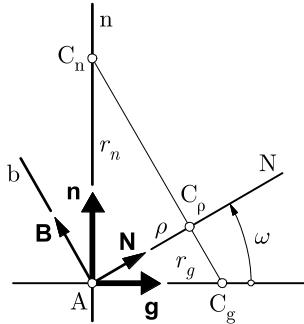


Fig. 1.29 Les trois rayons de courbure.

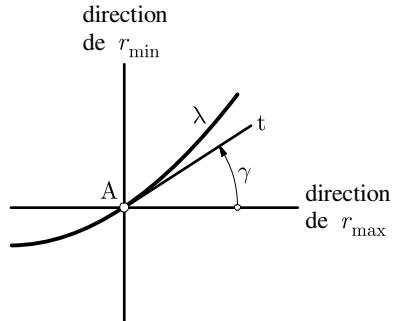


Fig. 1.30 Vue dans le plan tangent.

Similairement on peut calculer

$$\frac{1}{t_g} = \frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{\tau} \quad (1.33)$$

et, si γ désigne (comme à la figure 1.9) l'angle entre la direction principale de r_{\max} et la tangente à la courbe λ (fig. 1.30), on a

$$\frac{1}{t_g} = \left(\frac{1}{r_{\max}} - \frac{1}{r_{\min}} \right) \sin \gamma \cos \gamma \quad (1.34)$$

et toutes les courbes de Σ admettant t comme tangente en A ont, en ce point, la même torsion géodésique $1/t_g$ (même propriété que la courbure normale $1/r_n$, § 1.2.5).

Cas particulier

Si la courbe quelconque λ est une ligne de courbure α ou β , le repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ est $(\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$ sur α (§ 1.7.2) et $(-\mathbf{g}, \mathbf{t}, \mathbf{n})$ sur β . Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial}{\partial s_\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta}$$

on obtient, par identification des formules (1.14) et (1.31),

$$\frac{1}{r_{g\alpha}} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \frac{1}{r_{g\beta}} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (1.35)$$

D'autre part, avec (1.34), puisque $\gamma = 0$,

$$\frac{1}{t_{g\alpha}} = 0 \quad \frac{1}{t_{g\beta}} = 0 \quad (1.36)$$

1.7.8 Lignes remarquables sur une surface

Les *lignes de courbure*, enveloppes des directions principales de courbure, formant deux familles orthogonales, ont déjà été définies (§ 1.2.3). Sur ces lignes, la *torsion géodésique* $1/t_g$ est nulle.

Les *lignes asymptotiques* sont les lignes de *courbure normale* $1/r_n$ nulle (§ 1.2.4). En tout point d'une telle ligne, le plan osculateur (\mathbf{T}, \mathbf{N}) est tangent à la surface. Les éventuelles droites d'une surface sont des lignes asymptotiques. Certaines surfaces n'ont pas de telles lignes.

Les *lignes géodésiques* sont les lignes de *courbure géodésique* $1/r_g$ nulle. En tout point d'une telle ligne, le plan osculateur est normal à la surface et la normale principale coïncide avec la normale à la surface ($\mathbf{N} \equiv \mathbf{n}$). Entre deux points d'une surface, l'arc le plus court est celui de géodésique (§ 1.2.4). Les éventuelles droites d'une surface sont des géodésiques particulières.

1.7.9 Application – Surface de révolution

Une *surface de révolution* est engendrée par la rotation d'une courbe plane, le *méridien*, autour d'une droite située dans son plan, l'*axe de révolution* (axe Z , fig. 1.31 ; § 1.4.1). Chaque point du méridien décrit un cercle, le *parallèle*.

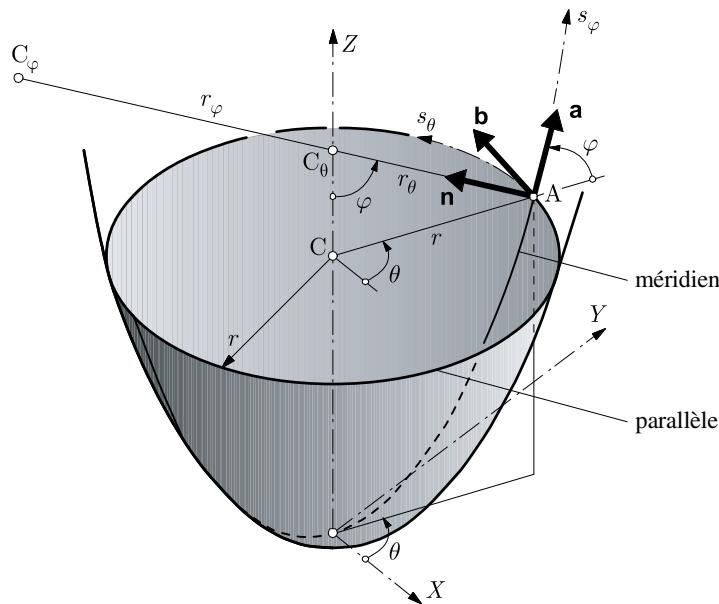


Fig. 1.31 Géométrie d'une surface de révolution.

On repère un point A par deux coordonnées, l'angle θ situant le plan mériдиен par rapport à l'axe X (ou au plan de X et Z) et l'angle φ donnant l'inclinaison de la tangente au mériдиен sur l'horizontale.

Méridiens et parallèles sont les lignes de courbure. On prend la coordonnée $\alpha \equiv \varphi$ sur les méridiens et la coordonnée $\beta \equiv \theta$ sur les parallèles. Les rayons de courbure principaux sont r_φ et r_θ (centres de courbure C_φ et, sur l'axe de révolution, C_θ). Le rayon r du parallèle est aussi son rayon de courbure (centre C).

On a (abscisse curviligne)

$$ds_\varphi = r_\varphi d\varphi \quad ds_\theta = r d\theta \quad (1.37)$$

et les paramètres de Lamé valent, avec (1.17),

$$A = r_\varphi \quad B = r \quad (1.38)$$

Le théorème de Meusnier donne (évident sur la figure)

$$r = r_\theta \sin \varphi \quad (1.39)$$

Les équations de Codazzi (1.24)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A}{r_\varphi} \right) = \frac{1}{r_\theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B}{r_\theta} \right) = \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial B}{\partial \varphi}$$

fournissent, pour la première, une identité ($\partial A / \partial \theta = 0$) et, pour la seconde (φ seule variable indépendante),

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_\varphi \cos \varphi \quad (1.40)$$

ce qui se contrôle aisément géométriquement (fig. 1.32).

Enfin, avec (1.40), on vérifie que l'équation de Gauss (1.25) est satisfaite.

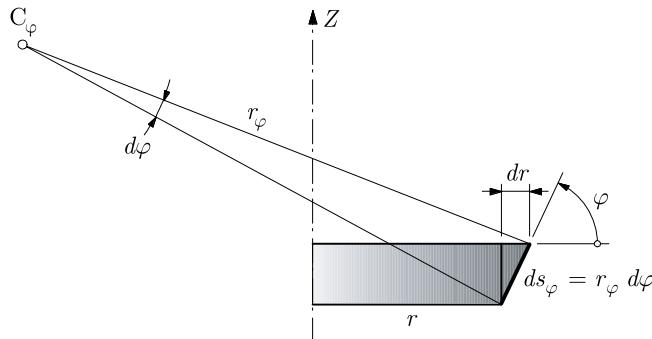


Fig. 1.32 Géométrie de la relation (1.40) : $dr = ds_\varphi \cos \varphi = r_\varphi d\varphi \cos \varphi$.

Les courbures de Frenet, normales et géodésiques, valent

- pour le méridien

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{r_\varphi} = \frac{d\varphi}{ds_\varphi} \quad \frac{1}{r_{n\varphi}} = \frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{r_\varphi} \quad \frac{1}{r_{g\varphi}} = 0 \quad (1.41)$$

- pour le parallèle (cf. fig. 1.29)

$$\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{r} \quad \frac{1}{r_{n\theta}} = \frac{1}{r_\theta} = \frac{\sin \varphi}{r} \quad \frac{1}{r_{g\theta}} = \frac{\cos \varphi}{r} \quad (1.42)$$

Les torsions sont nulles (lignes de courbure planes). Avec $1/r_{g\varphi} = 0$, le méridien est une géodésique.

2 Théorie des coques minces

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'expliquer de quelle manière on peut établir les équations nécessaires à la résolution du problème de coque. On se limite à la théorie la plus simple, due à Love. Les équations sont exprimées en utilisant les lignes de courbure comme lignes de coordonnées. Certaines ne sont pas démontrées en détail, bien que les informations données permettent de le faire sans difficulté majeure ; de plus, on trouvera, dans les ouvrages cités en bibliographie, tous les renseignements souhaitables.

Il semble en effet préférable, lors de l'établissement de ces équations, de souligner les aspects structuraux, profitables à l'ingénieur, plutôt que de s'attarder sur des démonstrations mathématiques certainement utiles, mais quelque peu fastidieuses. En conséquence, dans les chapitres qui traitent de sujets particuliers (grandes classes de coques ; chap. 4 à 8), les équations sont, en général, à nouveau établies de façon complète et détaillée, ce qui permet de mettre en évidence les propriétés du cas étudié. Elles ne sont donc pas simplement déduites des équations générales de ce chapitre. Une telle déduction, en effet, tend à masquer les caractéristiques physiques du problème ; elle est proposée à titre d'exercice, un exercice trivial par ailleurs.

2.2 Théorie de Love

Dans le domaine des coques, la première théorie recevable a été formulée par Love en 1888. Elle est construite sur le même modèle que la théorie des plaques de Kirchhoff, à savoir exprimer les équations en se référant à la surface moyenne tout en tirant parti, à l'aide d'hypothèses raisonnables, de la minceur de la structure.

La courbure de la coque pose toutefois des problèmes nouveaux et délicats, par rapport au cas de la plaque. Suite à de nombreuses recherches et controverses, la validité de la théorie simple de Love n'a finalement été confirmée que beaucoup plus tard par Koiter (1960).

On verra ci-après que la théorie de Love n'est, en réalité, qu'approximative. Elle néglige des termes dont l'ordre de grandeur peut être considéré comme petit. Il s'ensuit que certaines équations ne sont qu'imparfaitement satisfaites. Tant qu'il y a cohérence dans l'ordre de grandeur des termes négligés, la théorie est acceptable. C'est le cas de la théorie de Love, souvent appelée, pour cette raison, *première approximation cohérente* de la théorie des coques.

Le degré de précision de la théorie de Love est de quelques pour cent pour quasiment tous les cas de coque. (Font exception quelques formes particulières, à caractère plus académique que pratique, où la précision peut être moindre, de l'ordre de 5 à 10 %.) Pour l'ingénieur, la théorie de Love est donc entièrement satisfaisante.

2.3 Élément de coque

Sur la surface moyenne de la coque, on choisit les lignes de courbure comme lignes de coordonnées α et β , vu leurs propriétés remarquables (§ 1.2.3). On appelle z la coordonnée mesurée selon la normale n à la surface moyenne ($-t/2 \leq z \leq t/2$).

Dans la coque d'épaisseur t , on découpe un élément par deux paires de sections droites infiniment voisines, contenues dans les sections normales associées aux lignes de courbure (fig. 2.1).

Au niveau $z = 0$ de la surface moyenne, les longueurs des côtés curvilignes de l'élément sont ds_α et ds_β ; les courbures principales $1/r_{\max}$ et $1/r_{\min}$ sont désignées par $1/r_\alpha$ et $1/r_\beta$. Au niveau z , une surface parallèle à la surface moyenne coupe les faces de l'élément selon des arcs de longueur ds'_α et ds'_β . Par similitude des secteurs circulaires situés dans les plans (r_α, ds_α) et (r_β, ds_β) , on a

$$ds'_\alpha = \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) ds_\alpha \quad ds'_\beta = \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) ds_\beta \quad (2.1)$$

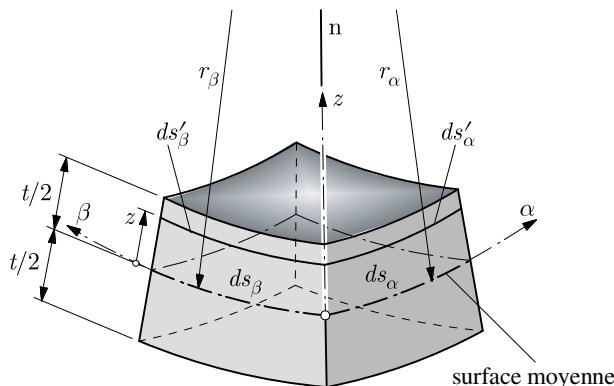


Fig. 2.1 Élément de coque dans les lignes de courbure (vue arrière).

2.4 Hypothèses

2.4.1 Hypothèses de linéarisation

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures, acceptant

- l'hypothèse de linéarisation géométrique, et
- l'hypothèse de linéarisation matérielle.

La première admet que déplacements et déformations restent petits, en sorte que les équations cinématiques soient linéaires (TGC vol. 1, § 4.2.2 et vol. 3, § 3.4.1). Pratiquement, les dilatations et, surtout, les rotations doivent rester petites. On sait que cette hypothèse ne peut être maintenue si l'on étudie les phénomènes d'instabilité.

La seconde admet que le matériau obéit à la loi de Hooke (TGC vol. 2, § 2.7.2 et vol. 3, § 4.1.2). Ici, par simplicité, on fait l'hypothèse complémentaire suivante :

- la coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

2.4.2 Hypothèses des structures minces

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur ;
- la contrainte normale transversale est négligeable.

La première hypothèse est purement cinématique et s'appelle parfois *loi de conservation des normales*. Il en résulte d'abord que les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad \gamma_{\beta z} = 0 \quad (2.2)$$

et ensuite que la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.3)$$

La seconde hypothèse, statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit

$$\sigma_z \cong 0 \quad (2.4)$$

Remarques

La première hypothèse est utilisée pour construire les équations cinématiques, non les équations statiques. En statique, les efforts tranchants associés aux glissements (2.2) sont nécessaires pour exprimer l'équilibre. Par conséquent, on doit comprendre que, pour formuler la cinématique, les déformations $\gamma_{\alpha z}$, $\gamma_{\beta z}$ et ε_z peuvent être négligées.

Les hypothèses ci-dessus sont d'autant mieux satisfaites que la minceur de la coque est effective ; elles réduisent l'état de contrainte dans la coque à un état de contrainte plan, parallèlement au plan tangent à la surface moyenne.

Dans le cadre des hypothèses avancées dans ce chapitre, on peut montrer que la composante σ_z a un ordre de grandeur négligeable. De même, admettre $\varepsilon_z = 0$ crée une erreur comparable, donc négligeable, tout en simplifiant l'expression de la cinématique.

2.4.3 Hypothèse de faible épaisseur

On fait encore l'hypothèse suivante :

- l'épaisseur t de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface moyenne, soit

$$\frac{t}{r_{\min}} \ll 1 \quad (2.5)$$

Cette hypothèse est essentielle en théorie de Love, car elle conduit à une simplification formidable des équations et fixe l'ordre de grandeur des termes négligeables, soit $O(t/r_{\min})$. Il en résulte, dans (2.1),

$$\frac{z}{r_{\alpha}} \ll 1 \quad \frac{z}{r_{\beta}} \ll 1 \quad (2.6)$$

d'où

$$ds'_{\alpha} \cong ds_{\alpha} \quad ds'_{\beta} \cong ds_{\beta} \quad (2.7)$$

ce qui signifie que les faces de l'élément de coque peuvent être admises rectangulaires (fig. 2.1).

En liaison avec (2.3), on déduit aussi qu'on peut faire agir toutes les charges au niveau de la surface moyenne.

En pratique, pour que la théorie qui suit soit valable, il est nécessaire de respecter, en tout point d'une coque, l'ordre de grandeur

$$\frac{t}{r_{\min}} < \frac{1}{10} \quad (2.8)$$

Remarque

La théorie de Love, construite sur les hypothèses précédentes, implique donc des erreurs d'ordre $O(t/r_{\min})$. Toute simplification portant sur des termes dont l'ordre de grandeur est inférieur ou égal à $O(t/r_{\min})$ est donc justifiée, alors qu'il serait vain de penser améliorer la théorie en tenant compte de tels termes, leur influence étant d'emblée masquée par les erreurs inhérentes aux hypothèses de base.

2.5 Autres théories

Diverses théories ont été proposées, afin d'éviter les incorrections de la théorie simplifiée de Love. Certaines sont des améliorations, restant au niveau d'une *première approximation cohérente*. D'autres sont des théories plus précises, dites *d'ordre supérieur*, abandonnant tout ou partie des hypothèses précédentes. Ces théories ne présentent que peu d'intérêt pratique.

Plus utiles sont les théories abandonnant l'hypothèse de conservation des normales. Elles s'adressent aux coques dites *d'épaisseur modérée*, dans lesquelles on souhaite tenir compte de la déformation par effort tranchant. Ces théories peuvent être développées en suivant les mêmes lignes que celles

utilisées dans ce chapitre pour établir la théorie de Love. Sortant du cadre de cet ouvrage, on en trouvera l'exposé dans les textes cités dans la bibliographie.

2.6 Cinématique

2.6.1 Déplacements

Sur une normale \mathbf{n} à la surface moyenne Σ d'une coque, on considère le point A, pied de \mathbf{n} sur Σ , et le point B, point de la coque situé à la distance z de A ($-t/2 \leq z \leq t/2$). On construit en A le repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ attaché à Σ . En configuration déformée, \mathbf{n}' , Σ' , \mathbf{A}' , \mathbf{B}' et $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{n}')$ sont les images correspondantes, avec $\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} = z$ par (2.3) (fig. 2.2).

On appelle u , v , w les composantes du vecteur déplacement \mathbf{u} du point A de la surface moyenne Σ ; la composante w est souvent qualifiée de *déplacement transversal ou normal*. L'équation paramétrique de la surface moyenne déformée Σ' est

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{x} + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{n} \quad (2.9)$$

et permet de déterminer l'image $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{n}')$ du repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$. On calcule d'abord, comme au paragraphe 1.7.2, les dérivées de \mathbf{x}' par rapport à α et β , ce qui, avec (1.12) et (1.14), fournit

$$\mathbf{x}'_{,\alpha} = A[(1 + \varepsilon_{\alpha})\mathbf{a} + \varepsilon_{\alpha\beta}\mathbf{b} + \theta_{\alpha}\mathbf{n}] \quad \mathbf{x}'_{,\beta} = B[\varepsilon_{\beta\alpha}\mathbf{a} + (1 + \varepsilon_{\beta})\mathbf{b} + \theta_{\beta}\mathbf{n}] \quad (2.10)$$

avec, A et B étant les paramètres de Lamé de Σ ,

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_{\alpha}} \quad \varepsilon_{\beta} = \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r_{\beta}} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \quad \varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (2.12)$$

$$\theta_{\alpha} = \frac{u}{r_{\alpha}} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad \theta_{\beta} = \frac{v}{r_{\beta}} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2.13)$$

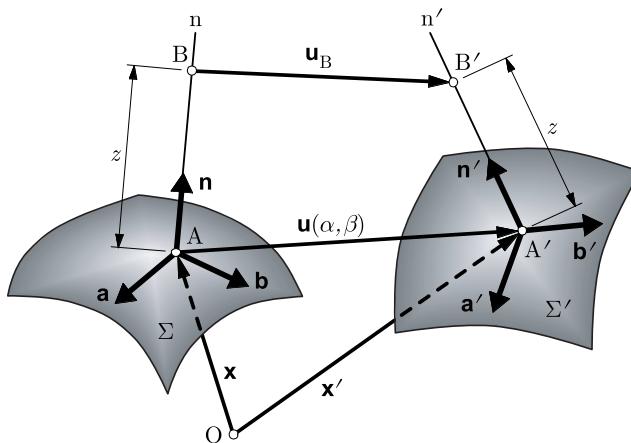


Fig. 2.2 Déplacement.

Dans les calculs qui suivent, il faut appliquer l'hypothèse de linéarisation géométrique pour que les expressions restent linéaires en les composantes des déplacements ou leurs gradients. Les paramètres de Lamé de Σ' , longueurs de $\mathbf{x}'_{,\alpha}$ et $\mathbf{x}'_{,\beta}$ (2.10), valent

$$A' = A(1 + \varepsilon_\alpha) \quad B' = B(1 + \varepsilon_\beta) \quad (2.14)$$

et permettent de calculer les vecteurs unités $\mathbf{a}' = \mathbf{x}'_{,\alpha}/A'$ et $\mathbf{b}' = \mathbf{x}'_{,\beta}/B'$, puis $\mathbf{n}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'$. On obtient, en négligeant ε_α et ε_β devant 1,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}' \\ \mathbf{b}' \\ \mathbf{n}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{\alpha\beta} & \theta_\alpha \\ \varepsilon_{\beta\alpha} & 1 & \theta_\beta \\ -\theta_\alpha & -\theta_\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{n} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Les vecteurs \mathbf{a}' et \mathbf{b}' sont dirigés selon les images dans Σ' des lignes de courbure de Σ . Ces images ne sont pas les lignes de courbure de la surface déformée Σ' et, par suite, \mathbf{a}' et \mathbf{b}' ne sont pas perpendiculaires.

En effectuant les produits scalaires de \mathbf{n}' avec \mathbf{a} et \mathbf{b} , on obtient

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = -\theta_\beta \quad \mathbf{n}' \cdot \mathbf{a} = -\theta_\alpha \quad (2.16)$$

ce qui permet d'interpréter θ_β et θ_α comme les composantes de la *rotation de la normale* \mathbf{n}' autour de \mathbf{a} et \mathbf{b} (fig. 2.3). On remarque, dans (2.13), que ces rotations ne sont pas liées qu'aux seules dérivées du déplacement transversal w .

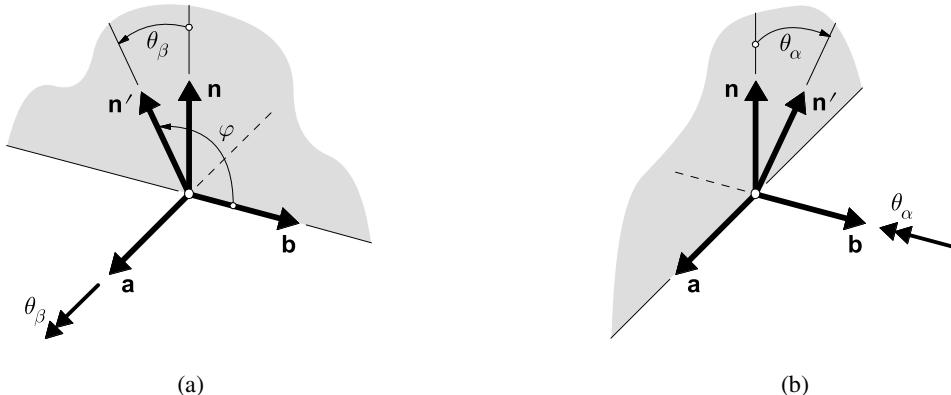


Fig. 2.3 Rotations : (a) composante θ_β ($\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \cos \varphi = \sin(\pi/2 - \varphi) \cong \pi/2 - \varphi = -\theta_\beta \Rightarrow \theta_\beta = \varphi - \pi/2$); (b) composante θ_α .

Le déplacement \mathbf{u}_B du point B (fig. 2.2) est donné par

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u} + z(\mathbf{n}' - \mathbf{n}) \quad (2.17)$$

Avec \mathbf{n}' tiré de (2.15), on met (2.17) sous la forme

$$\mathbf{u}_B = u_B \mathbf{a} + v_B \mathbf{b} + w_B \mathbf{n} = u \mathbf{a} + v \mathbf{b} + w \mathbf{n} - z(\theta_\alpha \mathbf{a} + \theta_\beta \mathbf{b})$$

qui fait apparaître les composantes du champ des déplacements

$$\begin{aligned} u_B &= u - z\theta_\alpha \\ v_B &= v - z\theta_\beta \\ w_B &= w \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ces relations donnent le déplacement d'un point quelconque B de la coque en fonction des grandeurs propres au point correspondant A de la surface moyenne : déplacement de A, rotation de la normale en A et cote constante z . Elles montrent que, parallèlement à la surface moyenne, les déplacements varient *linéairement* à travers l'épaisseur de la coque, ce qui exprime, en fait, la loi de conservation des normales.

2.6.2 Déformations et équations cinématiques

L'image $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{n}')$ du repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ contient la mesure de la déformation ; cette dernière doit donc figurer dans les coefficients des relations (2.10) à (2.15). Parmi eux, θ_α et θ_β ont déjà été interprétés.

On calcule les dilatations et le glissement usuels, associés à l'état plan de contrainte (§ 2.4.2), au point A, c'est-à-dire au niveau de la surface moyenne d'une part, puis au point B, dans une surface parallèle à la surface moyenne, à la cote z , d'autre part. Le premier cas fournit les *déformations membranaires*, tandis que le second fait apparaître, en plus, les *variations de courbure*.

Déformations membranaires

Sur la première ligne de coordonnée de la surface moyenne, les longueurs d'arc en configuration initiale, puis déformée, valent, avec (1.17) et (2.14),

$$ds_\alpha = A d\alpha \quad ds'_\alpha = A' d\alpha = A(1 + \varepsilon_\alpha) d\alpha$$

Avec ces relations, la *dilatation* a pour valeur

$$\frac{ds'_\alpha - ds_\alpha}{ds_\alpha} = \varepsilon_\alpha \tag{2.19}$$

donnée par la première des équations (2.11). Le long de l'autre ligne de coordonnée, on trouve, semblablement, la dilatation ε_β selon la deuxième équation (2.11).

Pour le *glissement*, on évalue la variation de l'angle droit qui se manifeste entre les vecteurs \mathbf{a}' et \mathbf{b}' (fig. 2.4) ; avec (2.15) et en linéarisant

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = \varepsilon_{\beta\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta} = \cos \psi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \cong \frac{\pi}{2} - \psi = \gamma$$

et le glissement est donné par la somme des deux relations de (2.12), qui peut s'écrire

$$\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \tag{2.20}$$

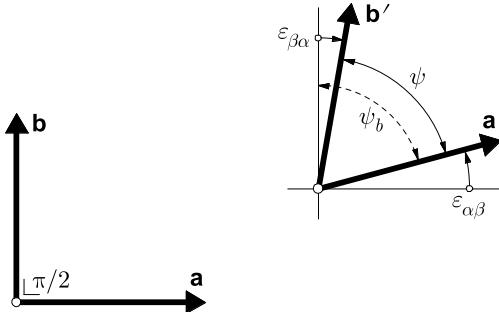


Fig. 2.4 Glissement ($\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \varepsilon_{\alpha\beta} = \cos \psi_b = \sin(\pi/2 - \psi_b) \cong \pi/2 - \psi_b$).

Variations de courbure

En tenant compte de l'hypothèse de faible épaisseur (2.5) ou (2.6), on trouve que les expressions des dilatations et du glissement, au point B d'une surface parallèle distante de z de la surface moyenne, sont de structure identique aux précédentes. On a par exemple

$$\varepsilon_{\alpha_B} = \frac{1}{A} \frac{\partial u_B}{\partial \alpha} + \frac{v_B}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w_B}{r_\alpha}$$

En introduisant (2.18), on trouve aisément les équations suivantes, qui montrent que les déformations varient *linéairement* à travers l'épaisseur de la coque,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha_B} &= \varepsilon_\alpha - z c_\alpha \\ \varepsilon_{\beta_B} &= \varepsilon_\beta - z c_\beta \\ \gamma_B &= \gamma - z c \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans ces relations, c_α , c_β et c sont les **variations de courbure cinématique**; elles valent

$$c_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad c_\beta = \frac{\theta_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \tag{2.22}$$

$$c = c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\theta_\alpha}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\theta_\beta}{B} \right) \tag{2.23}$$

avec

$$c_{\alpha\beta} = -\frac{\theta_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \quad c_{\beta\alpha} = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\theta_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tag{2.24}$$

Les variations de courbure *flexionnelles* c_α et c_β et la variation de courbure *torsionnelle* c permettent d'exprimer les déformations en un point quelconque de la coque en se référant aux déplacements de la surface moyenne. On peut montrer qu'une variation de courbure correspond effectivement au changement que subit cette courbure, de la configuration initiale à celle déformée; par exemple, on a

$$c_\alpha = \frac{1}{r'_\alpha} - \frac{1}{r_\alpha} \tag{2.25}$$

et la variation de courbure est *positive* si la courbure *augmente* ($r'_\alpha < r_\alpha$).

La figure 2.5 montre schématiquement comment une variation de courbure selon α intervient dans le calcul de la dilatation ε_{α_B} (2.21). En admettant une fibre de longueur unité sur la surface moyenne, on a, à la cote z , comme pour (2.1),

$$s = 1 - \frac{z}{r_\alpha} \quad s' = 1 - \frac{z}{r'_\alpha}$$

La dilatation (2.19) $\varepsilon = (s' - s)/s$ donne

$$\varepsilon = \frac{(1 - z/r'_\alpha) - (1 - z/r_\alpha)}{1 - z/r_\alpha} = -\frac{z/r'_\alpha - z/r_\alpha}{1 - z/r_\alpha}$$

et, avec l'hypothèse de faible épaisseur (2.6),

$$\varepsilon \cong -z \left(\frac{1}{r'_\alpha} - \frac{1}{r_\alpha} \right) = -zc_\alpha$$

qui est bien le second terme intervenant dans ε_{α_B} (2.21).

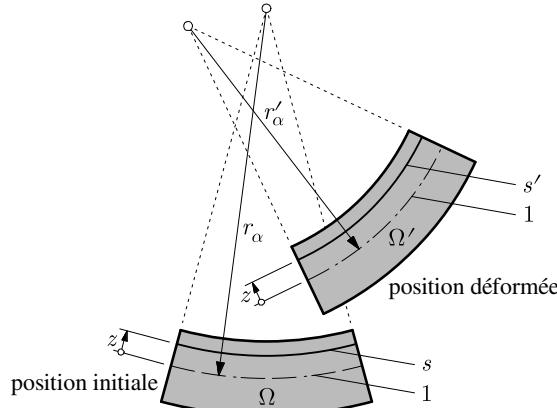


Fig. 2.5 Dilatation suite à la variation de courbure cinématique c_α .

Équations cinématiques

En conclusion, au niveau de la surface moyenne, la cinématique fait apparaître neuf inconnues, trois composantes u, v, w du déplacement et six composantes $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \gamma, c_\alpha, c_\beta, c$ de la déformation (*déformations de structure*), qui sont liées aux trois composantes du déplacement par les six *équations cinématiques ou relations déformations-déplacements*

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\alpha} & \varepsilon_\beta &= \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\beta} \\ \gamma &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) & & \\ c_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} & c_\beta &= \frac{\theta_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} \\ c &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\theta_\alpha}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\theta_\beta}{B} \right) & & \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dans ces équations interviennent les composantes θ_α et θ_β (2.13) de la rotation de la normale

$$\theta_\alpha = \frac{u}{r_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad \theta_\beta = \frac{v}{r_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}$$

Autre forme des équations cinématiques

Dans les équations (2.26) apparaissent les courbures géodésiques (1.35) des lignes de courbure

$$\frac{1}{r_{g\alpha}} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \frac{1}{r_{g\beta}} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

Utilisant ces courbures, ainsi que l'abscisse curviligne (§ 1.7.7), on peut écrire la cinématique sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial s_\alpha} - \frac{v}{r_{g\alpha}} - \frac{w}{r_\alpha} & \varepsilon_\beta &= \frac{u}{r_{g\beta}} + \frac{\partial v}{\partial s_\beta} - \frac{w}{r_\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{u}{r_{g\alpha}} + \frac{\partial v}{\partial s_\alpha} & \varepsilon_{\beta\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial s_\beta} - \frac{v}{r_{g\beta}} \\ \gamma &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial s_\beta} + \frac{1}{r_{g\alpha}} \right) u + \left(\frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \frac{1}{r_{g\beta}} \right) v \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial s_\alpha} - \frac{\theta_\beta}{r_{g\alpha}} & c_\beta &= \frac{\theta_\alpha}{r_{g\beta}} + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial s_\beta} \\ c_{\alpha\beta} &= \frac{\theta_\alpha}{r_{g\alpha}} + \frac{\partial \theta_\beta}{\partial s_\alpha} & c_{\beta\alpha} &= \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial s_\beta} - \frac{\theta_\beta}{r_{g\beta}} \\ c &= c_{\alpha\beta} + c_{\beta\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial s_\beta} + \frac{1}{r_{g\alpha}} \right) \theta_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \frac{1}{r_{g\beta}} \right) \theta_\beta \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.7 Statique

2.7.1 Contraintes et efforts intérieurs

Afin d'aboutir à une théorie bidimensionnelle, il faut intégrer les distributions des contraintes à travers l'épaisseur pour les remplacer par leurs résultantes équivalentes que sont les *efforts intérieurs*.

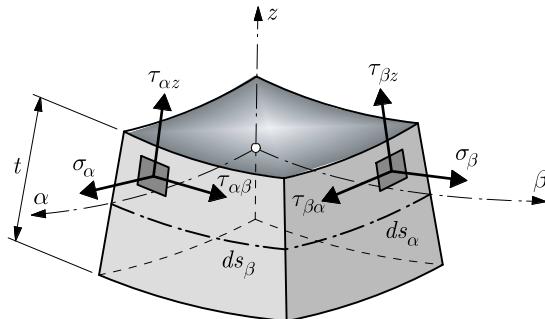


Fig. 2.6 Contraintes ($\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$: composantes de l'état plan de contrainte).

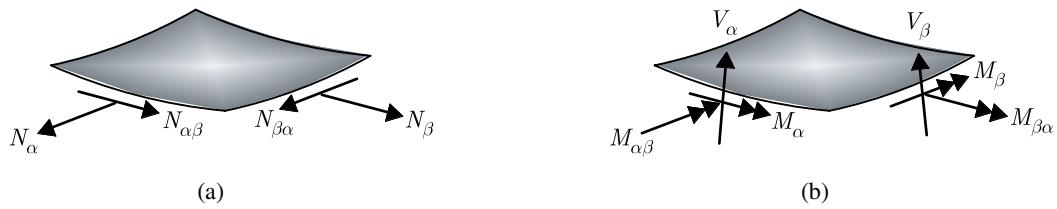


Fig. 2.7 Efforts intérieurs : (a) membranaires ; (b) flexionnels.

La figure 2.6 montre la convention de signe pour les contraintes : sur la face positive d'une section droite, du côté des z positifs, les contraintes sont positives lorsqu'elles agissent dans le sens des axes.

Le sens positif des efforts intérieurs est déduit de celui des contraintes (un effort intérieur positif produit des contraintes positives sur les faces positives dans la zone z positive). Les efforts intérieurs sont subdivisés en *efforts membranaires* et *efforts flexionnels*. Ils sont définis par unité de longueur d'arc sur la surface moyenne (fig. 2.7 ; sect. 1.3).

Le domaine d'intégration est rectangulaire, de largeur constante unité (en vertu de l'hypothèse de faible épaisseur ; § 2.4.3) et de hauteur t (épaisseur de la coque). On définit :

- les *efforts normaux* ([N/m] par exemple)

$$N_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha dz \quad N_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\beta dz \quad (2.29)$$

- les *efforts tangentiels* ([N/m] par exemple)

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} dz \quad N_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} dz \quad (2.30)$$

- les *moments de flexion* ([Nm/m] = [N] par exemple)

$$M_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha z dz \quad M_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\beta z dz \quad (2.31)$$

- les *moments de torsion* ([Nm/m] = [N] par exemple)

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} z dz \quad M_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} z dz \quad (2.32)$$

- les *efforts tranchants* ([N/m] par exemple)

$$V_\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha z} dz \quad V_\beta = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta z} dz \quad (2.33)$$

En vertu du principe de réciprocité des contraintes tangentielle, on a

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} \quad (2.34)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} \quad (2.35)$$

de sorte qu'il y a huit efforts intérieurs inconnus.

A partir des efforts intérieurs, on peut calculer la distribution des contraintes par les formules classiques (section rectangulaire de largeur 1 et hauteur t)

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{t} + \frac{12 M_{\alpha}}{t^3} z \quad \sigma_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{t} + \frac{12 M_{\beta}}{t^3} z \quad (2.36)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + \frac{12 M_{\alpha\beta}}{t^3} z \quad (2.37)$$

$$\tau_{\alpha z} = \frac{3V_{\alpha}}{2t} \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \quad \tau_{\beta z} = \frac{3V_{\beta}}{2t} \left(1 - \frac{4}{t^2} z^2\right) \quad (2.38)$$

Vu l'hypothèse de linéarisation matérielle, les contraintes σ_{α} , σ_{β} et $\tau_{\alpha\beta}$ varient linéairement, comme les déformations (2.21), et sont les plus grandes en $z = \pm t/2$. On admet que les contraintes tangentielle d'effort tranchant $\tau_{\alpha z}$ et $\tau_{\beta z}$ varient paraboliquement, sont maximales sur la surface moyenne ($z = 0$) et nulles en $z = \pm t/2$ (fig. 2.8).

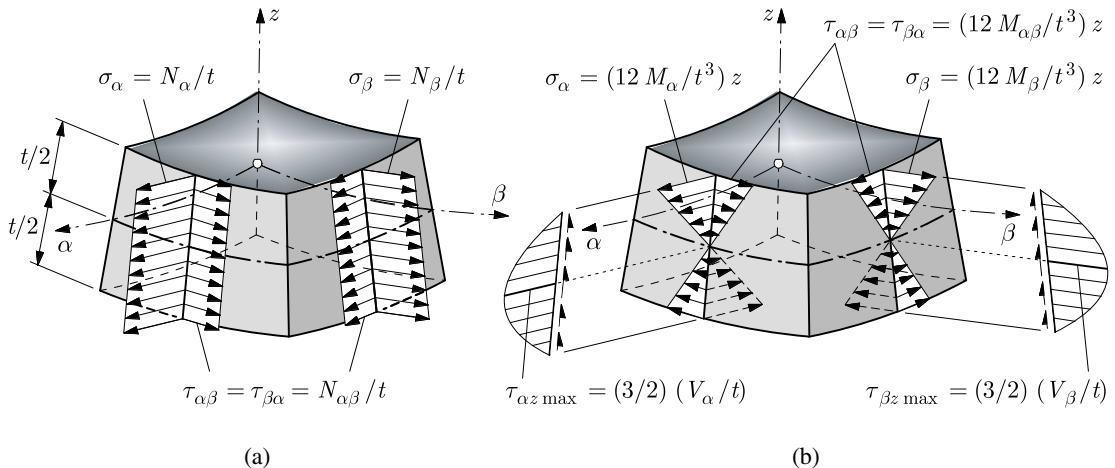


Fig. 2.8 Diagrammes des contraintes : (a) membranaires ; (b) flexionnelles.

Il n'y a pas contradiction entre la présence des efforts tranchants V_{α} et V_{β} et l'hypothèse de conservation des normales, comme déjà dit (§ 2.4.2). A l'instar des poutres de Bernoulli et des plaques de Kirchhoff, ces efforts tranchants sont nécessaires pour satisfaire aux conditions d'équilibre et peuvent se déduire après coup des autres efforts intérieurs par les équations d'équilibre (c'est-à-dire sans qu'il faille a priori définir le diagramme des contraintes tangentielle qu'ils produisent).

Remarques

A l'opposé des autres contraintes, qui découlent des déformations via la loi constitutive, les contraintes $\tau_{\alpha z}$ et $\tau_{\beta z}$, associées à des déformations supposées nulles, sont calculées directement à partir des efforts intérieurs V_α et V_β ; leur diagramme est admis identique à celui obtenu pour les poutres prismatiques à section droite rectangulaire (TGC vol. 2, § 9.8.2).

Lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse de faible épaisseur, le domaine d'intégration des équations (2.29) à (2.33) est légèrement trapézoïdal, sa largeur variant selon (2.1) (avec $ds_\alpha = ds_\beta = 1$). On trouve alors, à la place de (2.30) et (2.32),

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) dz \quad N_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) dz \quad (2.39)$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\alpha\beta} z \left(1 - \frac{z}{r_\beta}\right) dz \quad M_{\beta\alpha} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\beta\alpha} z \left(1 - \frac{z}{r_\alpha}\right) dz \quad (2.40)$$

On n'a plus, sauf cas particulier (sphère par exemple), les égalités (2.34) et (2.35), et il y a alors dix efforts intérieurs inconnus. Tenir compte de (2.1) complique énormément la formulation, sans apporter un gain de précision appréciable.

2.7.2 Équations d'équilibre

Pour exprimer l'équilibre, le plus efficace est de procéder vectoriellement. Dans ce but, on représente les divers vecteurs forces et moments qui s'exercent sur un élément isolé de la surface moyenne, de côtés ds_α et ds_β (fig. 2.9). On désigne par p_α , p_β et p_z les composantes de la force de surface \mathbf{p} provenant des diverses charges ou actions sollicitant la coque. On se limite à l'équilibre statique. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\alpha &= (N_\alpha \mathbf{a} + N_{\alpha\beta} \mathbf{b} + V_\alpha \mathbf{n}) ds_\beta & \mathbf{C}_\alpha &= (-M_{\alpha\beta} \mathbf{a} + M_\alpha \mathbf{b}) ds_\beta \\ \mathbf{F}_\beta &= (N_{\beta\alpha} \mathbf{a} + N_\beta \mathbf{b} + V_\beta \mathbf{n}) ds_\alpha & \mathbf{C}_\beta &= (-M_\beta \mathbf{a} + M_{\beta\alpha} \mathbf{b}) ds_\alpha \\ \mathbf{p} &= p_\alpha \mathbf{a} + p_\beta \mathbf{b} + p_z \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.41)$$

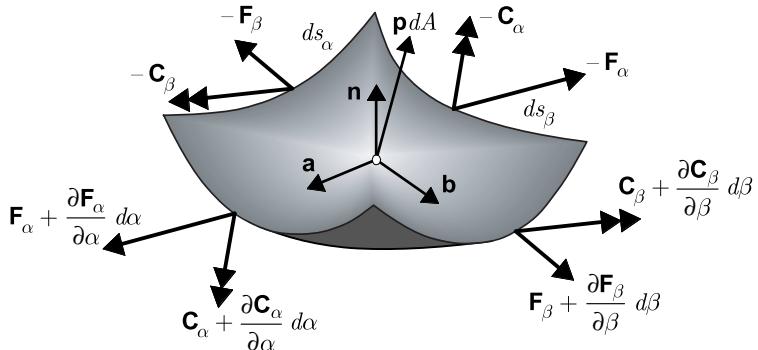


Fig. 2.9 Forces et moments sur l'élément de coque.

Equilibre de translation

L'équilibre en translation $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ s'écrit

$$-\mathbf{F}_\alpha + \left(\mathbf{F}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) - \mathbf{F}_\beta + \left(\mathbf{F}_\beta + \frac{\partial \mathbf{F}_\beta}{\partial \beta} d\beta \right) + \mathbf{p} dA = \mathbf{0}$$

En utilisant (1.17), (1.18) et, pour les dérivées, (1.14), on transforme l'équation ci-dessus en une équation de la forme $H_\alpha \mathbf{a} + H_\beta \mathbf{b} + H_z \mathbf{n} = \mathbf{0}$ qui fournit trois équations d'équilibre en composantes $H_\alpha = 0$, $H_\beta = 0$ et $H_z = 0$, à savoir

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\beta\alpha}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{AB}{r_\alpha} V_\alpha + ABp_\alpha = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha - \frac{AB}{r_\beta} V_\beta + ABp_\beta = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BV_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AV_\beta) + \frac{AB}{r_\alpha} N_\alpha + \frac{AB}{r_\beta} N_\beta + ABp_z = 0 \quad (2.44)$$

Equilibre de rotation

On exprime avantageusement l'équilibre en rotation $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ en se plaçant au centre de l'élément de coque. A la contribution des moments eux-mêmes

$$-\mathbf{C}_\alpha + \left(\mathbf{C}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{C}_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) - \mathbf{C}_\beta + \left(\mathbf{C}_\beta + \frac{\partial \mathbf{C}_\beta}{\partial \beta} d\beta \right)$$

s'ajoute celle des forces (couples de bras de levier ds_α et ds_β)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{F}_\alpha) ds_\alpha + (\mathbf{b} \times \mathbf{F}_\beta) ds_\beta$$

où l'on néglige les termes d'ordre supérieur (ordre 3 et plus). La charge \mathbf{p} ne produit pas de moment.

En procédant comme précédemment, on aboutit à une équation de la forme $G_\alpha \mathbf{a} + G_\beta \mathbf{b} + G_z \mathbf{n} = \mathbf{0}$ qui conduit aux trois équations

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha - ABV_\beta = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{\beta\alpha}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - ABV_\alpha = 0 \quad (2.46)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} - \frac{1}{r_\alpha} M_{\alpha\beta} + \frac{1}{r_\beta} M_{\beta\alpha} = 0 \quad (2.47)$$

Remarque

Lorsque, dans l'élément de surface moyenne (fig. 2.9), on se déplace de $d\alpha$, la longueur du côté ds_β change. Il en est de même pour ds_α . Ces changements apparaissent, dans les équations d'équilibre, au niveau des coefficients de Lamé : ces derniers restent prisonniers des dérivées, car (1.17) $ds_\alpha = A d\alpha$ et $ds_\beta = B d\beta$, avec $A = A(\alpha, \beta)$ et $B = B(\alpha, \beta)$.

Sixième équation d'équilibre et bilan

L'équation d'équilibre de rotation autour de la normale à la coque (2.47) a causé bien des tracas à la théorie de Love. En effet, en tenant compte de (2.34) et (2.35), force est de constater que cette équation n'est, sauf exception, pas satisfaite... L'équilibre ne pouvant être remis en question, le problème se situe au niveau de l'hypothèse de faible épaisseur (§ 2.4.3), qui est à l'origine des égalités (2.34) et (2.35).

Si on ne fait pas cette hypothèse et si l'on adopte (2.39) pour les efforts tangentiels $N_{\alpha\beta}$ et $N_{\beta\alpha}$, et (2.40) pour les moments de torsion $M_{\alpha\beta}$ et $M_{\beta\alpha}$, l'équation (2.47) est identiquement satisfaite.

En conclusion, on doit admettre que (2.47) correspond à une identité et il n'y a que *cinq équations d'équilibre* (2.42) à (2.46), trois de translation et deux de rotation, liant les huit efforts intérieurs (2.29) à (2.35) et les charges.

L'équation (2.47) est connue sous le nom de *sixième équation d'équilibre*.

Autre forme des équations d'équilibre

En dérivant dans les parenthèses de chacune des cinq équations d'équilibre, puis en divisant par AB , on fait apparaître la courbure géodésique (1.35) des lignes de courbure

$$\frac{1}{r_{g\alpha}} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \frac{1}{r_{g\beta}} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

Utilisant ces courbures, ainsi que l'abscisse curviligne (§ 1.7.7), on peut écrire les équations d'équilibre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial s_\beta} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{r_{g\beta}} - \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{r_{g\alpha}} - \frac{V_\alpha}{r_\alpha} + p_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial N_\beta}{\partial s_\beta} + \frac{N_\alpha - N_\beta}{r_{g\alpha}} + \frac{N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}}{r_{g\beta}} - \frac{V_\beta}{r_\beta} + p_\beta &= 0 \\ \frac{\partial V_\alpha}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial V_\beta}{\partial s_\beta} + \frac{N_\alpha}{r_\alpha} + \frac{N_\beta}{r_\beta} + \frac{V_\alpha}{r_{g\beta}} - \frac{V_\beta}{r_{g\alpha}} + p_z &= 0 \\ \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial M_\beta}{\partial s_\beta} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{r_{g\alpha}} + \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{r_{g\beta}} - V_\beta &= 0 \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial s_\beta} + \frac{M_\alpha - M_\beta}{r_{g\beta}} - \frac{M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}}{r_{g\alpha}} - V_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec, toujours, $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ et $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$.

2.8 Loi constitutive

Pour un matériau élastique linéaire isotrope en état plan de contrainte (sect. 2.4), la loi de Hooke s'écrit (TGC vol. 3, § 5.6.1)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\varepsilon_{\beta\beta}) \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\varepsilon_{\alpha\alpha}) \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (2.49)$$

où E est le module d'élasticité, ν le coefficient de Poisson et G le module de glissement. Avec (2.21), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha} (\equiv \varepsilon_{\alpha_B}) &= \varepsilon_\alpha - zc_\alpha \\ \varepsilon_{\beta\beta} (\equiv \varepsilon_{\beta_B}) &= \varepsilon_\beta - zc_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta} (\equiv \gamma_B) &= \gamma - zc\end{aligned}\quad (2.50)$$

Pour exprimer la loi de Hooke au niveau de la surface moyenne, on introduit (2.49) et (2.50) dans les expressions (2.29) à (2.32) des efforts intérieurs et on intègre. On obtient la *loi constitutive liant les efforts intérieurs aux déformations de coque*

$$\begin{aligned}N_\alpha &= C(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) & M_\alpha &= D(\psi_\alpha + \nu\psi_\beta) \\ N_\beta &= C(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) & M_\beta &= D(\psi_\beta + \nu\psi_\alpha) \\ N_{\alpha\beta} &= C\frac{1-\nu}{2}\gamma = Gt\gamma & M_{\alpha\beta} &= D\frac{1-\nu}{2}\chi = G\frac{t^3}{12}\chi\end{aligned}\quad (2.51)$$

avec

- la *raideur extensionnelle* C et la *raideur flexionnelle* D

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.52)$$

- les *variations de courbure statique* ψ_α , ψ_β et χ

$$\psi_\alpha = -c_\alpha \quad \psi_\beta = -c_\beta \quad \chi = -c \quad (2.53)$$

La loi (2.51) donne six équations liant six efforts intérieurs à six déformations. On observe, au niveau constitutif, que les effets membranaires et flexionnels sont *découplés*.

Les variations de courbure statique ψ_α , ψ_β et χ sont de *signe opposé* aux variations de courbure cinématique c_α , c_β et c , pour qu'un moment positif s'associe à des contraintes positives dans la loi constitutive. Par exemple, pour que M_α soit positif, il faut que son action *diminue* la courbure ($r'_\alpha > r_\alpha$), afin de tendre les fibres z^+ (fig. 2.10a). La variation positive de courbure cinématique est dictée par les déplacements et est opposée à la précédente (fig. 2.10b).

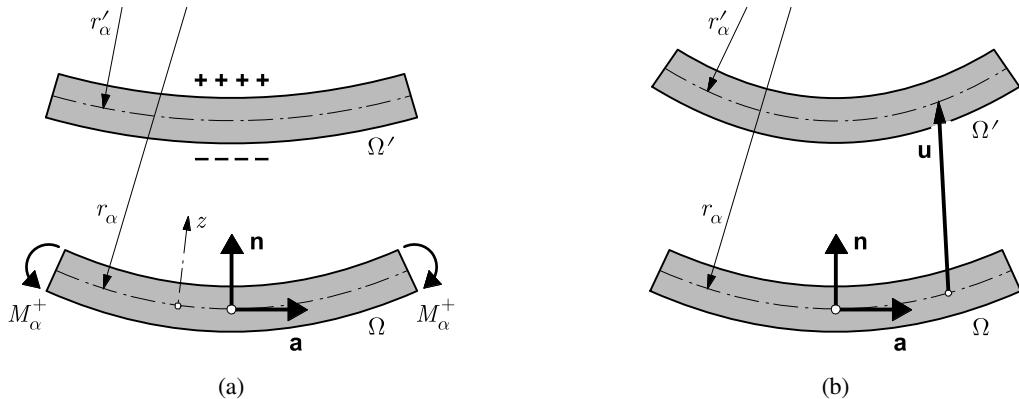


Fig. 2.10 Variation positive : (a) de la courbure statique ; (b) de la courbure cinématique.

2.9 Bilan des inconnues et équations

Grâce aux hypothèses choisies, l'étude d'une coque a été ramenée au niveau de sa surface moyenne. Les développements précédents font apparaître dix-sept inconnues

- trois déplacements (u, v, w),
- six déformations ($\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \gamma, c_\alpha$ ou ψ_α, c_β ou ψ_β, c ou χ),
- huit efforts intérieurs ($N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, V_\alpha, V_\beta$),

reliées entre elles par dix-sept équations

- six équations cinématiques (2.26),
- cinq équations statiques (2.42) à (2.46),
- six équations constitutives (2.51),

dont l'ensemble forme un système différentiel d'ordre 8. Il est aisément d'éliminer les déformations et les efforts intérieurs pour constater qu'il subsiste un système de trois équations différentielles aux dérivées partielles couplées, d'ordre 2 pour u et v , et d'ordre 4 pour w (formulation en déplacements). Les conditions aux limites, quatre en chaque point du bord, sont examinées à la section 2.10.

Les équations ont été établies dans des axes particuliers, les lignes de courbure de la surface moyenne. Plus généralement, on peut les formuler en coordonnées curvilignes quelconques, grâce au calcul tensoriel. L'appareil mathématique est alors fort complexe, mais doit être utilisé si l'on désire discuter la théorie rigoureusement. Cette démarche, qui présente peu d'intérêt pratique pour l'ingénieur, sort du cadre du présent ouvrage.

Il existe heureusement beaucoup de cas où la théorie générale peut être simplifiée tout en conservant un degré de précision tout à fait satisfaisant. L'un des buts de cet ouvrage est de présenter quelques cas de ce genre, utiles et fréquents en pratique. Ils permettent d'acquérir une connaissance tant physique que théorique du comportement des coques, indispensable au concepteur et occultée par la théorie générale précédente. C'est pourquoi, pour la plupart de ces cas, les équations sont établies à nouveau, complètement et indépendamment des équations générales.

2.10 Conditions aux limites

2.10.1 Efforts de bord équivalents

Dans les coques de Love existe la même particularité que dans les plaques de Kirchhoff : le moment de torsion au bord doit être remplacé par un effet statique équivalent. Cet effet touche deux efforts intérieurs qu'on appelle *efforts de bord équivalents*.

Admettons que le bord se situe le long d'une ligne de courbure β ($\alpha = \text{cste}$). La figure 2.11 montre ce bord, vu depuis **a**, où les moments de torsion sont remplacés par des couples équivalents. Au point A, les deux forces équivalentes ont une action selon **b** sur $N_{\alpha\beta}$ et selon **n** sur V_α . Les efforts équivalents de bord sont donc

$$N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta} - \frac{M_{\alpha\beta}}{r_\beta} \quad V_\alpha^* = V_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \quad (2.54)$$

Enfin, dans un angle, il peut aussi exister une réaction concentrée, comme dans les plaques. A l'angle des lignes de coordonnées α et β , elle vaut $\pm(M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha})$.

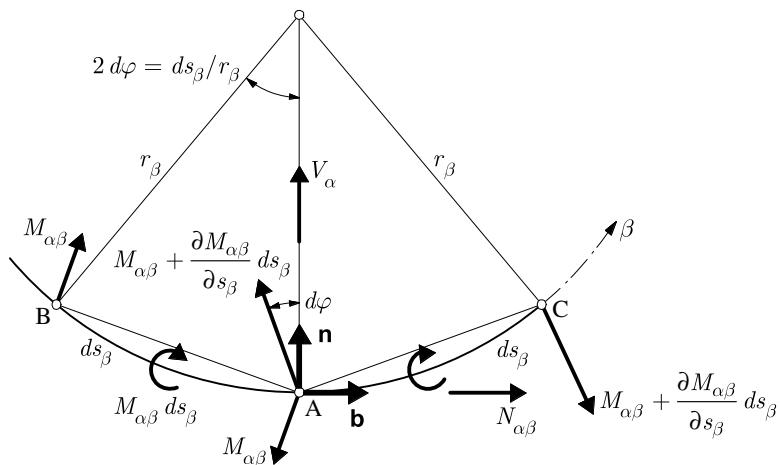


Fig. 2.11 Contributions du moment de torsion $M_{\alpha\beta}$ à l'effort tangentiel $N_{\alpha\beta}$ et à l'effort tranchant V_α sur un bord $\alpha = \text{cste}$; les couples équivalents ont BA et AC comme bras de levier ($\overline{BA} \cong ds_\beta = B d\beta$).

2.10.2 Conditions sur les bords

En chaque point d'un bord, par exemple $\alpha = \text{cste}$, on peut exprimer *quatre conditions aux limites*. Elles portent sur

- les efforts intérieurs

$$N_\alpha, \quad N_{\alpha\beta}^*, \quad V_\alpha^*, \quad M_\alpha \quad (2.55)$$

- les déplacements

$$u, \quad v, \quad w, \quad \theta_\alpha \quad (2.56)$$

Efforts et déplacements sont associés et, dans un tandem, seule l'une des grandeurs peut être imposée. Classiquement, la grandeur est imposée nulle (par exemple $u = 0$), mais on peut aussi imposer des déplacements d'appui ou des efforts de bord non nuls (par exemple $N_\alpha = \bar{N}_\alpha$, $w = \bar{w}$, etc.).

Les conditions aux limites usuelles portent sur les grandeurs suivantes :

- bord libre

$$N_\alpha, \quad N_{\alpha\beta}^*, \quad V_\alpha^*, \quad M_\alpha$$

- rouleau (sur un plan normal à \mathbf{a})

$$u, \quad v, \quad V_\alpha^*, \quad M_\alpha \quad \text{ou} \quad u, \quad N_{\alpha\beta}^*, \quad V_\alpha^*, \quad M_\alpha$$

selon la condition imposée dans la direction β ;

- articulation

$$u, \quad v, \quad w, \quad M_\alpha$$

- encastrement

$$u, \quad v, \quad w, \quad \theta_\alpha$$

Les conditions aux limites jouent, en théorie des coques, un rôle primordial. Elles sont associées aux équations générales des coques, et cet ensemble forme un *problème aux limites* difficile à résoudre. Certaines solutions peuvent toutefois être obtenues pour des conditions aux limites particulières. Il y a alors souvent contradiction entre les conditions aux limites propres aux solutions analytiques et celles pratiquement réalisables sur l'ouvrage construit. On sera souvent confronté à ce problème par la suite.

3 Théories particulières

3.1 Introduction

Les équations générales de la théorie flexionnelle des coques de forme quelconque ont été établies au chapitre 2 dans les coordonnées curvilignes orthogonales des lignes de courbure. Il peut être intéressant d'exprimer ces équations différemment, afin de s'adapter à certaines formes géométriques particulières de coques. D'un autre côté, les ingénieurs ont aussi cherché à simplifier les équations pour pouvoir les résoudre et obtenir d'utiles renseignements sur la réponse des coques, même si parfois ces simplifications ne constituent plus qu'une approximation de la réalité.

Dans le cadre de cet ouvrage, on se limite aux seules notions qui présentent quelque intérêt. Parmi les théories qui suivent, certaines ne sont pas exprimées dans les lignes de courbure et les équations ne peuvent pas être simplement déduites de celles du chapitre 2 ; toutefois, la démonstration de ces équations n'apportant rien de nouveau, elle n'est, le plus souvent, pas donnée.

3.2 Théorie membranaire

3.2.1 Hypothèses et équations

Dans certains cas de coques, les efforts intérieurs flexionnels sont nuls, ou si petits, qu'ils peuvent être négligés. On est donc amené à poser, éventuellement sous forme d'*hypothèse*,

$$M_\alpha = M_\beta = M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = V_\alpha = V_\beta = 0 \quad (3.1)$$

ce qui conduit à ce qu'on appelle la **théorie membranaire**, car la coque ne résiste plus aux charges extérieures que par le seul jeu des trois efforts intérieurs membranaires N_α , N_β et $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$. Lorsque (3.1) ne peut être accepté, on parle, par opposition, de **théorie flexionnelle**.

La théorie membranaire peut être tenue pour une simplification extrême de la théorie flexionnelle. Elle s'en déduit directement et s'exprime dans les lignes de courbure.

En introduisant (3.1) dans les équations d'équilibre en translation (2.42) à (2.44), on obtient (avec $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta} (AN_{\alpha\beta}) - \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta} N_{\alpha\beta} + ABp_\alpha = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial\beta} (AN_\beta) + \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta} N_\alpha + ABp_\beta = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{N_\alpha}{r_\alpha} + \frac{N_\beta}{r_\beta} + p_z = 0 \quad (3.4)$$

alors que les équations d'équilibre en rotation (2.45) à (2.47) sont identiquement satisfaites.

La cinématique, purement membranaire, est donnée par les équations (2.11) et (2.20)

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{r_\alpha} \quad \varepsilon_\beta = \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{w}{r_\beta} \quad (3.5)$$

$$\gamma = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \quad (3.6)$$

Quant à la loi constitutive, elle se limite, dans (2.51) et avec $C = Et/(1 - \nu^2)$, à

$$\begin{aligned} N_\alpha &= C(\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) & N_\beta &= C(\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) \\ N_{\alpha\beta} &= C \frac{1 - \nu}{2} \gamma = Gt\gamma \end{aligned} \quad (3.7)$$

Il y a neuf équations pour les neuf inconnues N_α , N_β , $N_{\alpha\beta}$, ε_α , ε_β , γ , u , v et w .

Si nécessaire, la rotation des normales peut toujours être calculée après coup par (2.13)

$$\theta_\alpha = \frac{u}{r_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \quad \theta_\beta = \frac{v}{r_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial\beta} \quad (3.8)$$

et on utilise aussi, fréquemment, l'inverse de la loi constitutive (3.7)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{Et} (N_\alpha - \nu N_\beta) & \varepsilon_\beta &= \frac{1}{Et} (N_\beta - \nu N_\alpha) \\ \gamma &= \frac{1}{Gt} N_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2.2 Discussion des équations

Dans les équations d'équilibre (3.2) à (3.4), le nombre des inconnues est égal au nombre des équations : les équations d'équilibre permettent de trouver à elles seules – sauf cas particulier (§ 3.2.3) – les efforts intérieurs membranaires. On aboutit donc à une simplification remarquable : *la théorie membranaire peut avoir un caractère isostatique*.

Une fois la statique connue, les déplacements s'obtiennent en introduisant (3.9) dans (3.5) et (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\alpha} &= \frac{1}{Et} (N_\alpha - \nu N_\beta) \\ \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{r_\beta} &= \frac{1}{Et} (N_\beta - \nu N_\alpha) \\ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) &= \frac{1}{Gt} N_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les deux systèmes différentiels (3.2)-(3.4) et (3.10) sont du second ordre, de sorte que, globalement, la théorie membranaire est du quatrième ordre.

3.2.3 Conditions aux limites

Si l'on applique (3.1) au cas général (§ 2.10.2), les conditions aux limites membranaires, le long d'un bord $\alpha = \text{cste}$ par exemple, peuvent porter sur

- les efforts intérieurs

$$N_\alpha, \quad N_{\alpha\beta} \quad (3.11)$$

- les déplacements

$$u, \quad v \quad (3.12)$$

Les déplacements w et θ_α ne peuvent être utilisés puisqu'ils s'associent à des efforts intérieurs flexionnels inexistant en théorie membranaire.

Il y a donc *deux conditions aux limites* en tout point d'un bord en théorie membranaire, ce qui est en accord avec l'ordre 4 du problème différentiel. Cependant, *les conditions aux limites ne peuvent être toutes statiques : la moitié d'entre elles au moins doit être cinématique*. S'il y a autant de conditions statiques que cinématiques, l'état membranaire est isostatique. Dès qu'il y a plus de conditions cinématiques que statiques, l'état membranaire devient hyperstatique. Ces propriétés sont dues à la structure particulière des équations différentielles de la théorie membranaire.

Remarque

La nécessité des conditions cinématiques ressort clairement de l'illustration suivante. Formons un cylindre avec une feuille de papier, en la roulant sur elle-même, puis en collant les deux bords. Sans appui aucun, la feuille de papier n'ayant aucune rigidité flexionnelle (théorie membranaire), cette coque est totalement déformable (mécanisme). Pour pouvoir la faire travailler en membrane, il faut l'appuyer convenablement. Ainsi, *les conditions aux limites cinématiques sont indispensables* pour créer la forme de la coque, rigidifier cette dernière, puis assurer le maintien de cette forme sous l'action des charges.

3.2.4 Applicabilité de la théorie membranaire

Une coque a, en général, une épaisseur de paroi faible ; elle n'est donc pas réellement adaptée pour résister par flexion et il serait préférable de la faire travailler en état membranaire. *C'est par un choix judicieux de sa forme, grâce à la courbure, qu'une coque peut résister aux actions par les seuls efforts membranaires.*

La théorie membranaire donne une solution approximative intéressante pour les coques de géométrie très régulière, de chargement réparti et de conditions d'appui de type membranaire. Les coques de révolution font souvent partie de cette catégorie. Les coques à comportement exclusivement membranaire sont rares (ballon sphérique sous pression uniforme par exemple).

Pour juger de la valeur de la théorie membranaire, il suffit d'étudier les conditions aux limites : le plus souvent, les conditions réelles, cinématiques ou statiques, ne sont pas respectées. Il faut donc revenir à la théorie flexionnelle pour avoir une solution valable.

L'examen de cette dernière montre que, parfois, il ne naît des efforts flexionnels qu'au voisinage immédiat des discontinuités ; dès qu'on s'en écarte, ces efforts s'amortissent très rapidement et disparaissent au point qu'il ne reste que les efforts membranaires, quasiment identiques à ceux fournis par la théorie membranaire. C'est le cas par exemple pour les coques à symétrie de révolution (géométrie et chargement), pour lesquelles une technique de calcul simplifiée consiste à superposer à la solution membranaire les effets flexionnels locaux nécessaires à assurer la compatibilité cinématique. Ces effets s'appellent *effets (flexionnels) de bord* (parce qu'ils s'associent, en fait, aux conditions aux limites). Il existe des méthodes approchées simples pour déterminer la solution flexionnelle corrective. La solution obtenue moyennant cette superposition est d'un degré de précision tout à fait satisfaisant en pratique (chap. 5).

Prenons par exemple le cas d'une coque hémisphérique articulée sur son grand cercle et soumise à une pression uniforme (fig. 3.1a). L'état membranaire est une compression uniforme qui déforme la coque en une sphère légèrement plus petite (fig. 3.1b). Cependant, les appuis empêchent ce déplacement et la coque est fléchie à sa base (réaction horizontale répartie H). On vérifie que cette flexion reste très localisée (elle ne s'étend guère au-delà de l'arc $s = 2\sqrt{at}$) et ne perturbe presque pas le reste de la sollicitation membranaire (fig. 3.1c).

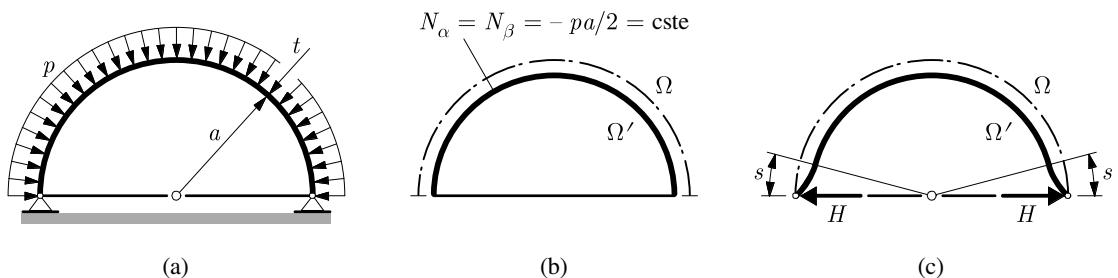


Fig. 3.1 Effet de bord dans une coque de révolution : (a) vue en coupe (donnée) ; (b) déformée membranaire ; (c) déformée réelle (s : zone des effets flexionnels de bord).

De tels effets de bord apparaissent au niveau des appuis (fig. 3.1, 3.2 et 3.4), des jonctions de coques (fig. 3.2 et 3.4), des raidisseurs (fig. 3.3), des changements d'épaisseur (fig. 3.4), des charges concentrées (fig. 1.12), etc.

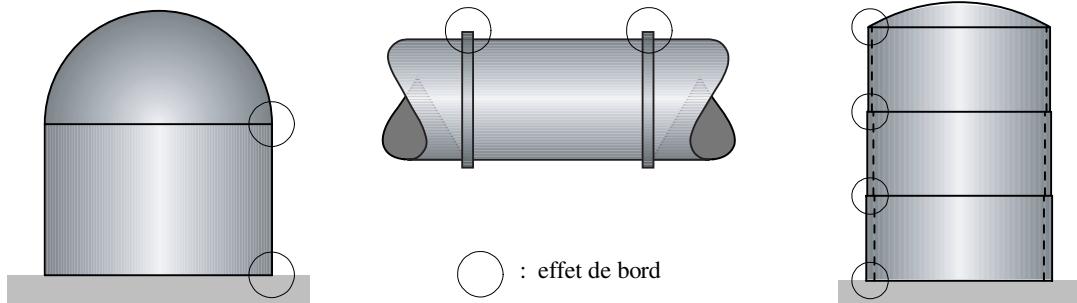


Fig. 3.2 Jonction d'une sphère sur un cylindre.

Fig. 3.3 Conduite forcée raidie par des anneaux.

Fig. 3.4 Réservoir cylindrique à épaisseur de paroi variable.

3.3 Théorie en coordonnées cartésiennes

Il est tentant d'exprimer les équations des coques en coordonnées cartésiennes, mais les relations obtenues restent compliquées. On ne donne ici que les équations d'équilibre attachées à la théorie membranaire.

3.3.1 Géométrie

Dans les axes cartésiens (X, Y, Z) , la surface moyenne Σ de la coque est décrite sous forme explicite (§ 1.2.1) par

$$Z = Z(X, Y) \quad (3.13)$$

On utilise, comme coordonnées curvilignes sur Σ , les lignes x et y résultant de l'intersection de Σ par les plans $Y = C_Y$ et $X = C_X$, où C_X et C_Y sont des constantes (fig. 3.5a). En général, ces lignes ne se coupent pas à angle droit sur Σ , contrairement à leurs projections dans le plan (X, Y) ; *elles ne sont donc pas des lignes de courbure de la surface*.

Un élément, découpé dans la surface par deux paires de plans verticaux distants de dX et dY , a la forme d'un parallélogramme (fig. 3.5b). Les angles des lignes de coordonnées avec les axes X et Y étant donnés par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial Z}{\partial X} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

les longueurs ds_x et ds_y des côtés de l'élément valent

$$ds_x = \frac{dX}{\cos \alpha} \quad ds_y = \frac{dY}{\cos \beta} \quad (3.14)$$

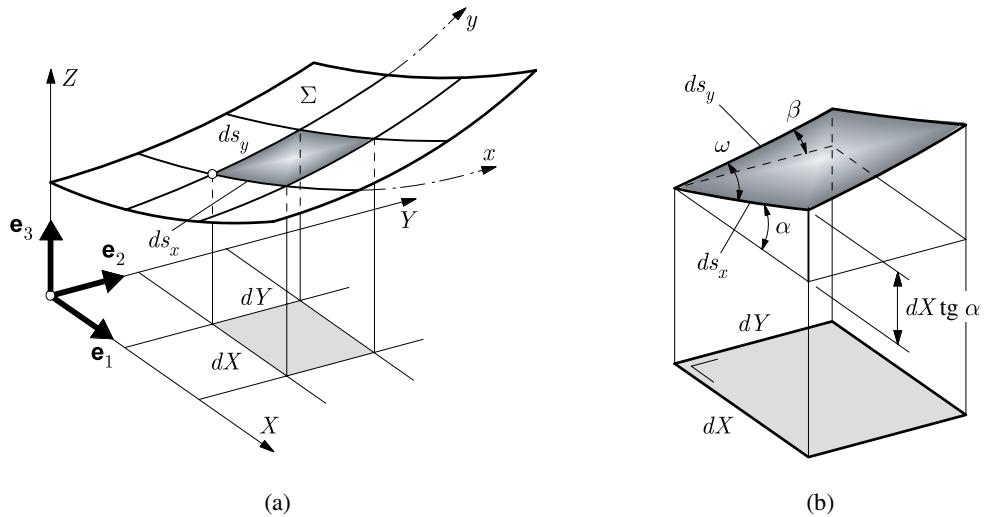


Fig. 3.5 Surface dans les axes cartésiens : (a) coordonnées ; (b) élément de surface.

Les produits scalaire et vectoriel des vecteurs

$$\mathbf{ds}_x = dX \mathbf{e}_1 + dX \operatorname{tg} \alpha \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{ds}_y = dY \mathbf{e}_2 + dY \operatorname{tg} \beta \mathbf{e}_3$$

permettent de trouver l'angle ω et l'aire dA de l'élément de surface

$$\cos \omega = \sin \alpha \sin \beta \quad (3.15)$$

$$dA = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} dX dY = \eta dX dY \quad (3.16)$$

3.3.2 Efforts intérieurs membranaires et équilibre

Sur les bords de l'élément, les efforts intérieurs membranaires N_x , N_{xy} et N_y , N_{yx} agissent selon les coordonnées curvilignes ; il n'y a pas perpendicularité et les efforts intérieurs forment un *système de forces obliques* (fig. 3.6a), pour lequel la réciprocité est toujours vraie : $N_{xy} = N_{yx}$.

On désigne par p_X , p_Y et p_Z les composantes, selon les axes X , Y et Z , de la charge répartie par unité d'aire de la surface moyenne. Exprimant les composantes des forces parallèlement aux axes (fig. 3.6b), on obtient les *trois équations d'équilibre*

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} N_{xy} + \eta p_X = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} N_{xy} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) + \eta p_Y = 0 \quad (3.18)$$

$$\left(N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + \left(N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + \eta(p_Z - p_X \operatorname{tg} \alpha - p_Y \operatorname{tg} \beta) = 0 \quad (3.19)$$

où η est donné par (3.16). La structure de la troisième équation a été simplifiée grâce aux deux premières équations (raison pour laquelle apparaissent les composantes p_X et p_Y de la charge).

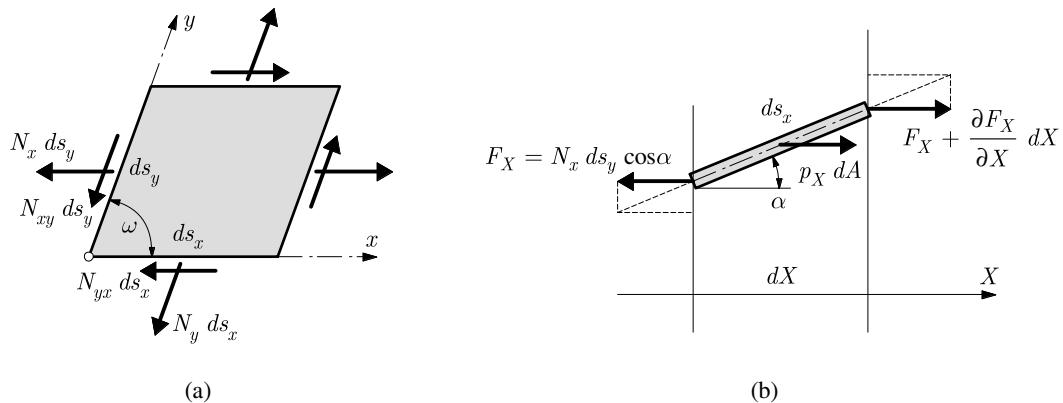


Fig. 3.6 Efforts intérieurs : (a) forces obliques sur l'élément (vue dans le plan de l'élément) ; (b) coupe dans le plan $Y = C_Y$ par le centre de l'élément et composantes horizontales des forces.

Les équations (3.17) à (3.19) représentent un système de trois équations différentielles pour les trois efforts inconnus N_x , N_y et N_{xy} . La dernière équation, qui contient les dérivées secondes de $Z(X, Y)$, montre que les efforts intérieurs dépendent bien de la forme de la surface moyenne. Ces équations sont attribuées à Pucher (1934).

Il y a deux conditions aux limites par bord (§ 3.2.3).

La similitude des relations (3.17) et (3.18) avec les équations d'équilibre de l'élasticité plane (TGC vol. 3, chap. 5) a permis de trouver diverses solutions aux équations de Pucher. Mais il s'agit de solutions membranaires qui, le plus souvent, ne satisfont pas aux conditions d'appui réelles. De plus, les grandeurs s'expriment dans des axes obliques et les sections de la coque ne se font pas le long des lignes de courbure, ce qui peut poser de difficiles problèmes (on n'est plus dans des sections droites au sens du paragraphe 1.2.3). Enfin, l'avènement des méthodes numériques (éléments finis, chap. 11) a fait perdre beaucoup d'intérêt à ces solutions analytiques.

Remarque

Les termes $N_x \cos \alpha / \cos \beta$, N_{xy} et $N_y \cos \beta / \cos \alpha$ des équations d'équilibre (3.17) à (3.19) sont susceptibles d'une interprétation physique simple et pratique. Considérons par exemple la composante horizontale $N_x ds_y \cos \alpha$ (fig. 3.6b) ; avec (3.14) pour ds_y , il vient

$$N_x ds_y \cos \alpha = N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} dY = N_X dY$$

et $N_x \cos \alpha / \cos \beta$ est l'intensité de la projection horizontale de N_x par unité de ligne moyenne rapportée à l'horizontale (dY). On écrit cette quantité N_X (indice majuscule) et on interprète semblablement N_{xy} et $N_y \cos \beta / \cos \alpha$, d'où

$$N_X = N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad N_{XY} = N_{xy} \quad N_Y = N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (3.20)$$

et les deux équations (3.17) et (3.18) représentent l'équilibre horizontal d'un élément de coque projeté.

3.4 Coques surbaissées

3.4.1 Géométrie

Lorsqu'une coque a, en tout point, une surface moyenne de très faible courbure, elle est qualifiée de *coque surbaissée*; la surface moyenne est aussi dite *surbaissée*. On peut tracer un plan, à peu près parallèle à la surface moyenne Σ de la coque, dans lequel on dessine les axes X et Y d'un système d'axes cartésiens (X, Y, Z) (fig. 3.7), et définir Σ par rapport à ce plan, explicitement, par (3.13)

$$Z = Z(X, Y)$$

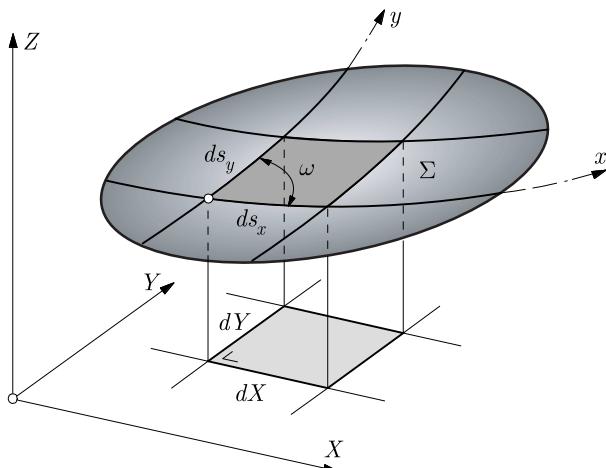


Fig. 3.7 Surface moyenne d'une coque surbaissée.

La surface moyenne de la coque est surbaissée si, par rapport au plan de référence (X, Y) , les *pentes*

$$\frac{\partial Z}{\partial X} \quad \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

sont *petites*, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées premières de $Z(X, Y)$ sont négligeables devant l'unité

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2 \ll 1 \quad \left(\frac{\partial Z}{\partial Y}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z}{\partial Y}\right| \ll 1 \quad (3.21)$$

En pratique, ces pentes ne devraient pas dépasser 0,1 radian, mais les résultats peuvent encore être intéressants jusqu'à 0,5 radian ($\sim 30^\circ$).

Comme précédemment, on prend, pour lignes de coordonnées (x, y) sur Σ , l'intersection de la surface avec les plans verticaux $Y = C_Y$ et $X = C_X$. De (3.14), (3.15) et (3.16), avec $\cos \alpha \cong 1$ et $\cos \beta \cong 1$, on déduit

$$ds_x \cong dX \quad ds_y \cong dY \quad \cos \omega \cong 0 \quad dA \cong dX dY \quad (3.22)$$

Les accroissements de coordonnées curvilignes sont égaux à ceux de coordonnées cartésiennes, les lignes de coordonnées sont quasi orthogonales ($\omega \cong \pi/2$) – cependant, ces lignes ne sont pas celles de courbure principale – et les éléments de surface peuvent être admis rectangulaires et identiques à leur projection sur (X, Y) . Quant aux sections de la coque le long des lignes x et y bordant ces éléments, elles ne sont plus exactement des sections droites (au sens du paragraphe 1.2.3) ; néanmoins, l'erreur commise en les considérant comme telles est négligeable.

Remarque

La langue scientifique anglaise possède deux qualificatifs permettant de distinguer les coques surbaissées des autres : *shallow* et *deep*. La langue française n'a pas de terme pour *deep*. On emploie parfois les expressions à *faible courbure* et à *forte courbure*. Ici, si l'on ne précise pas que la coque est surbaissée, on sous-entend qu'elle peut être à forte courbure.

3.4.2 Théories

Deux théories de coques surbaissées sont couramment utilisées : l'une, dite de Donnell, s'exprime en coordonnées curvilignes (x, y) , l'autre, de Marguerre, en coordonnées cartésiennes (X, Y) . La différence est insignifiante pour les résultats pratiques, mais essentielle pour les techniques numériques (méthode des éléments finis, chap. 11).

Dans l'un et l'autre cas, la théorie s'appuie sur l'hypothèse, de type *géométrique*, postulant que *la surface moyenne est surbaissée* (les relations (3.21) et (3.22) s'appliquent). Puis, selon la théorie, une hypothèse complémentaire, de type *cinématique*, est nécessaire ou non ; c'est à ce stade que s'exprime la différence entre les deux théories.

Au reste, la structure de la loi constitutive ne change pas, que la coque soit surbaissée ou non, que l'on soit en coordonnées curvilignes ou cartésiennes. Cette structure est donnée par les équations (2.51), qui ne sont pas rappelées ci-après.

Enfin, les conditions aux limites restent au nombre de quatre par bord (sect. 2.10). Mais, en coque surbaissée, la notion d'effort tangentiel équivalent tombe ($N_{\alpha\beta}^* \cong N_{\alpha\beta}$) ; par contre, celle d'effort tranchant équivalent (V_α^*) subsiste.

3.4.3 Coques surbaissées en coordonnées curvilignes (Théorie de Donnell)

Toutes les grandeurs et équations s'expriment dans les coordonnées curvilignes (x, y) de la surface moyenne. La normale est désignée par z .

Dans cette théorie, une hypothèse complémentaire, de caractère *cinématique*, est nécessaire ; elle postule que *les composantes membranaires u et v du déplacement sont négligeables devant la composante transversale w* : elles peuvent être ignorées dans l'expression des rotations, et disparaissent donc aussi de celles des courbures. Enfin, on peut montrer que les efforts tranchants n'interviennent plus dans les deux premières équations d'équilibre en translation.

Les rotations sont simplement

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.23)$$

Les six équations cinématiques sont

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \quad (3.24)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2w \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \quad (3.25)$$

$$c_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad c_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad c = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.26)$$

Rotations et variations de courbure ne dépendent plus que du déplacement transversal $w(x, y)$: c'est la *simplification essentielle* apportée (mais aussi recherchée...) par cette théorie des coques surbaissées. La présence, dans γ (3.25), du dernier terme, contenant la dérivée mixte de Z , prouve que (x, y) ne sont pas les lignes de courbure. On note aussi la similitude des variations de courbure cinématique avec les expressions propres à la flexion des plaques de Kirchhoff.

L'équilibre produit cinq équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x &= 0 & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y &= 0 \\ N_x \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p_z &= 0 & (3.27) \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y &= 0 & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x &= 0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites portent sur (bord $x = C_x$)

$$u, \quad v, \quad w, \quad \theta_x \quad N_x, \quad N_{xy}, \quad V_x^* = V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad M_x \quad (3.28)$$

Donnell a, le premier (1933), proposé les équations précédentes dans son étude sur l'instabilité des coques cylindriques circulaires. Ces équations ont été reprises par moult scientifiques, ainsi que par les ingénieurs désireux de résoudre les équations flexionnelles des voûtes autoportantes (chap. 8).

En comparant les équations (2.13) et (3.23) par exemple, on observe l'effet simplificateur de l'hypothèse cinématique : les termes en u et v s'effacent devant le terme en w . Or les termes négligés contiennent les rayons de courbure. Ce fait joue un rôle primordial dans la méthode des éléments finis, en défaveur de la théorie de Donnell (chap. 11).

3.4.4 Coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (Théorie de Marguerre)

On travaille dans les axes cartésiens (X, Y, Z) et toutes les grandeurs s'y réfèrent. La correspondance entre la coque surbaissée et son plan (X, Y) de référence a lieu par projection orthogonale sur (X, Y) . Aucune hypothèse complémentaire n'est nécessaire.

Les rotations sont

$$\theta_X = \frac{\partial w}{\partial X} \quad \theta_Y = \frac{\partial w}{\partial Y} \quad (3.29)$$

La cinématique s'exprime par les six équations

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial X} \quad \varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Y} \quad (3.30)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \quad (3.31)$$

$$c_X = \frac{\partial \theta_X}{\partial X} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \quad c_Y = \frac{\partial \theta_Y}{\partial Y} = \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} \quad c = \frac{\partial \theta_X}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_Y}{\partial X} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} \quad (3.32)$$

L'équilibre fournit cinq équations

$$\frac{\partial N_X}{\partial X} + \frac{\partial N_{XY}}{\partial Y} + p_X = 0 \quad \frac{\partial N_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial N_Y}{\partial Y} + p_Y = 0 \quad (3.33)$$

$$N_X \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2N_{XY} \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + N_Y \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} + \frac{\partial V_X}{\partial X} + \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + p_Z - p_X \frac{\partial Z}{\partial X} - p_Y \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial M_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial M_Y}{\partial Y} - V_Y = 0 \quad \frac{\partial M_X}{\partial X} + \frac{\partial M_{XY}}{\partial Y} - V_X = 0 \quad (3.35)$$

où les dérivées (notation de Monge)

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

peuvent s'interpréter comme les courbures et la torsion géométriques de la surface moyenne surbaissée.

Les conditions aux limites portent sur (bord $X = C_X$)

$$u, \quad v, \quad w, \quad \theta_X \quad N_X, \quad N_{XY}, \quad V_X^* = V_X + \frac{\partial M_{XY}}{\partial Y}, \quad M_X \quad (3.36)$$

Ces équations sont attribuées à Marguerre (1938). Ce sont les plus simples et, pourtant, les dernières à avoir été utilisées intensivement par les ingénieurs.

Comme pour la théorie de Donnell, les déplacements u et v ont disparu des équations de la cinématique (3.29) et (3.32). Mais, contrairement à la théorie de Donnell, celle de Marguerre aboutit à cette simplification par la seule hypothèse géométrique. Ce fait présente un intérêt considérable pour les méthodes numériques, privilégiant l'emploi de la théorie de Marguerre (chap. 11).

Remarque

Les contributions membranaires aux équations d'équilibre (3.33) et (3.34) peuvent se déduire des équations (3.17), (3.18) et (3.19).

4 Coques de révolution

Théorie membranaire

4.1 Introduction

Les *coques de révolution*, représentées par leurs surfaces moyennes (sphère, calotte sphérique, cône, tronc de cône, cylindre, paraboloïde, hyperboloïde, etc. ; § 1.4.1) sont très utilisées dans la construction du génie civil (réservoirs, châteaux d'eau, silos, cheminées, tours de télévision, enceintes de réacteur, tunnels, galeries, conduites forcées, tours de refroidissement, couvertures, fondations, etc.). Elles trouvent également de nombreuses applications (citernes, récipients sous pression, chaudières, conduites, tuyauteries, bouteilles, fuselages d'avion, fusées, coques de sous-marins, etc.) dans d'autres domaines très variés de l'ingénierie (mécanique, aéronautique, hydraulique, construction navale, offshore, chimie, épuration, etc.).

La *théorie membranaire* donne, pour les coques de révolution, des résultats aisés à obtenir et de bonnes valeurs pour les cas de *chargement de révolution*, ce qui est fréquent en pratique.

4.2 Géométrie

Pour que la surface moyenne de la coque soit une *surface de révolution* (§ 1.7.9), on fait pivoter une courbe plane, dite *méridien* et contenue dans le plan méridien, autour d'un axe situé lui aussi dans le plan méridien, l'*axe de révolution*. Chaque point du méridien décrit un cercle, le *parallèle*.

Méridiens et parallèles sont les lignes de courbure. En un point, le rayon de courbure du méridien est un rayon de courbure principal de la surface ; l'autre est centré sur l'axe de révolution.

La figure 4.1 définit les notations et les coordonnées. L'axe Z du système d'axes cartésiens (X, Y, Z) est placé sur l'axe de révolution. Un point A de la surface Σ est ordinairement repéré par les deux coordonnées φ et θ avec

- φ : angle d'inclinaison de la tangente au méridien (se retrouve entre l'axe de révolution et la normale au point A);
- θ : angle positionnant le plan méridien.

Les rayons de courbure principaux sont r_φ et r_θ . Si r désigne le rayon du parallèle passant par A, on a (théorème de Meusnier, § 1.2.5 ; relation (1.8) ou (1.39))

$$r = r_\theta \sin \varphi \quad (4.1)$$

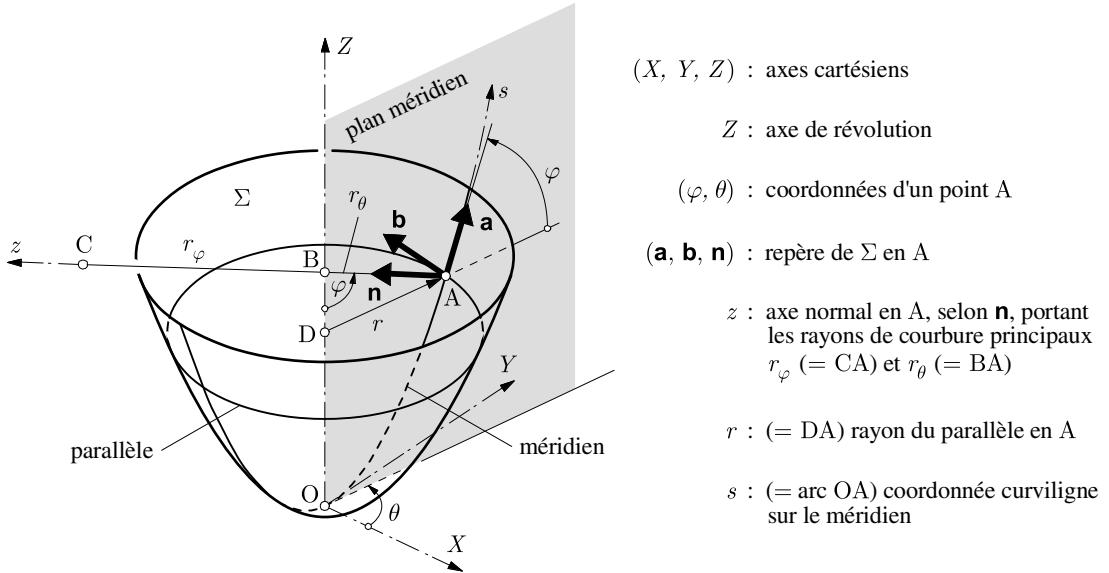


Fig. 4.1 Géométrie d'une surface de révolution.

A la place de φ , on emploie parfois avantageusement l'abscisse curviligne s sur le méridien ; on a (fig. 4.2)

$$ds = r_\varphi d\varphi \quad (4.2)$$

et, avec $dr = ds \cos \varphi$, on obtient (deuxième équation de Codazzi, § 1.7.9 ; relation (1.40))

$$\frac{dr}{d\varphi} = r_\varphi \cos \varphi \quad (4.3)$$

Le repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$, attaché à la surface moyenne Σ au point A, avec

- \mathbf{a} selon la tangente au méridien (sens s),
- \mathbf{b} selon la tangente au parallèle (sens θ),
- \mathbf{n} selon la normale à la surface (sens z),

peut se déduire du système (X, Y, Z) par deux rotations successives (θ et φ).

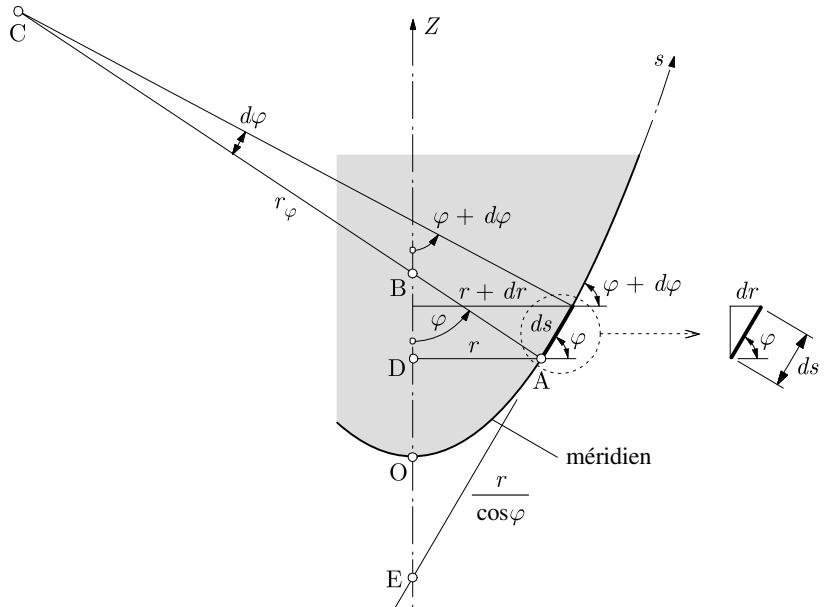


Fig. 4.2 Géométrie dans le plan méridien.

Remarque

Pour les coques de révolution, les coordonnées α et β de la théorie générale sont désignées par φ et θ , comme c'est souvent le cas dans la littérature. Il convient alors de ne pas confondre la coordonnée θ avec les composantes θ_α et θ_β de l'angle dont tourne la normale : *l'indice marque la différence*.

4.3 Équations d'équilibre

On isole, par quatre sections droites entourant le point A (fig. 4.3), un élément de coque compris entre deux méridiens voisins ($d\theta$) et deux parallèles voisins ($d\varphi$) ; les côtés de l'élément, de rayon r et r_φ , sont de longueur $r d\theta$ et $r_\varphi d\varphi$. La figure 4.3 montre les forces sur l'élément, dues aux efforts intérieurs membranaires N_φ , N_θ , $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ et aux composantes des charges de surface p_φ , p_θ , p_z .

On emploie les qualificatifs *méridien*, *circonférentiel* et *normal* (ou *transversal*) pour désigner les grandeurs dirigées selon φ , θ et z :

- N_φ et p_φ : effort normal méridien et charge méridienne ;
- N_θ et p_θ : effort normal circonférentiel et charge circonférentielle ;
- p_z : charge normale (ou transversale).

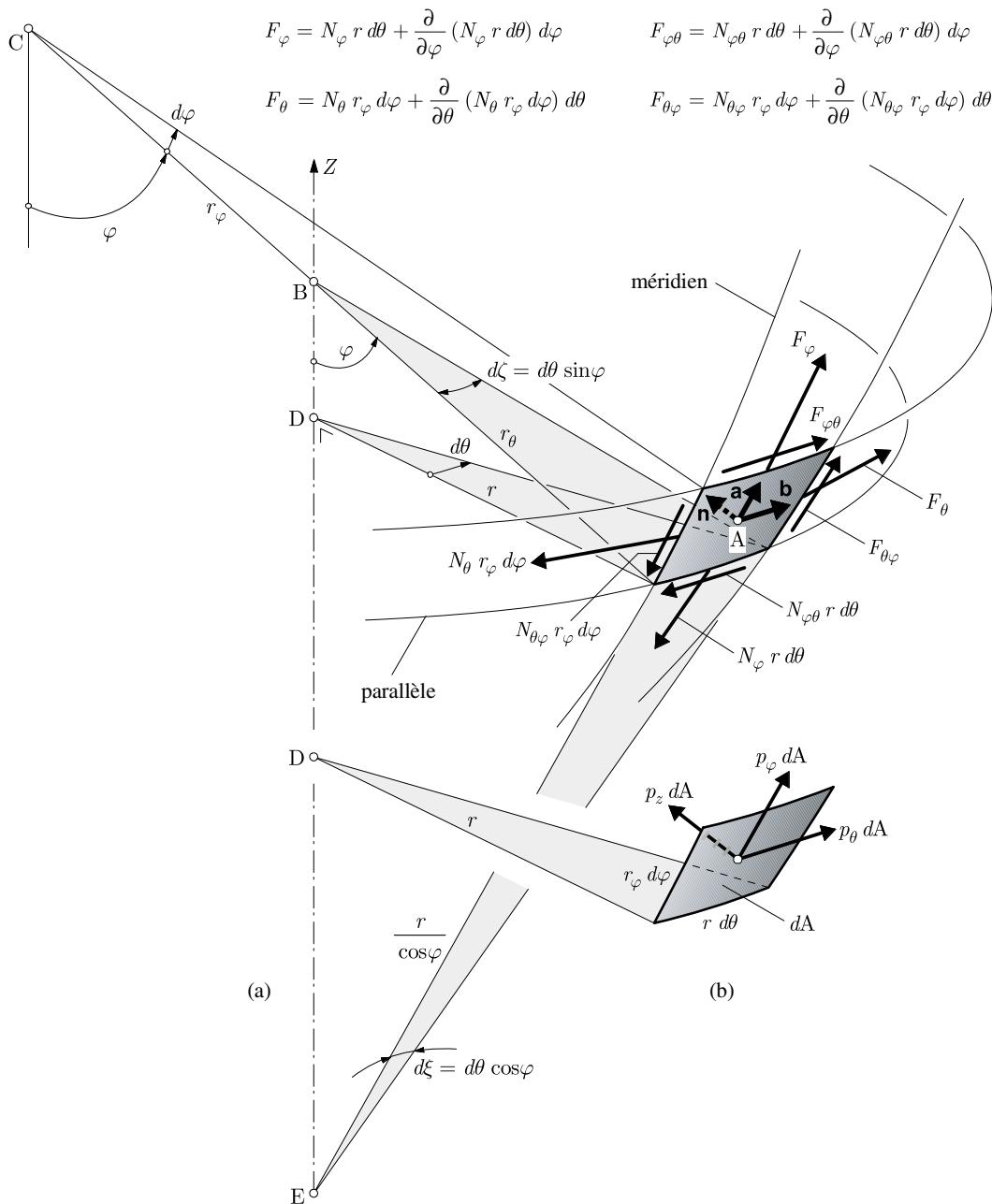


Fig. 4.3 Élément de coque de révolution en théorie membranaire : (a) efforts intérieurs et géométrie
 $(r d\theta = r_\theta d\zeta = (r / \cos \varphi) d\xi)$, d'où $d\zeta = d\theta \sin \varphi$, avec (4.1), et $d\xi = d\theta \cos \varphi$;
(b) charges ($dA = r_\varphi r d\varphi d\theta$, $(p_z dA) \perp dA$).

L'équilibre de translation selon les directions (φ, θ, z) associées au repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$ fournit trois équations reliant les trois efforts membranaires inconnus.

L'équation d'équilibre $\sum F_\varphi = 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} \sum F_\varphi &= -N_\varphi r d\theta + N_\varphi r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r d\theta) d\varphi \\ &\quad - N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi + N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi) d\theta \\ &\quad - N_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\varphi r_\varphi d\varphi r d\theta \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r) d\theta d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi}) r_\varphi d\varphi d\theta \\ &\quad - N_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\varphi r_\varphi r d\varphi d\theta = 0 \end{aligned}$$

L'avant-dernier terme est la contribution de l'effort normal circonférentiel N_θ due à la courbure dans le plan du parallèle (fig. 4.4a) ou, ce qui est équivalent, au non-parallélisme des côtés méridiens dans le plan tangent en A (fig. 4.4b).

L'équation d'équilibre $\sum F_\theta = 0$ donne

$$\begin{aligned} \sum F_\theta &= -N_\theta r_\varphi d\varphi + N_\theta r_\varphi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta r_\varphi d\varphi) d\theta \\ &\quad - N_{\varphi\theta} r d\theta + N_{\varphi\theta} r d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} r d\theta) d\varphi \\ &\quad + N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\theta r_\varphi d\varphi r d\theta \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta) r_\varphi d\varphi d\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} r) d\theta d\varphi \\ &\quad + N_{\theta\varphi} r_\varphi d\varphi d\theta \cos \varphi + p_\theta r_\varphi r d\varphi d\theta = 0 \end{aligned}$$

L'avant-dernier terme est la contribution de l'effort tangentiel $N_{\theta\varphi}$ due au non-parallélisme des côtés méridiens (fig. 4.4b).

A cause de la double courbure de l'élément, les efforts normaux méridien N_φ (dans le plan méridien contenant la courbure $1/r_\varphi$, fig. 4.4c) et circonférentiel N_θ (dans le plan contenant la courbure $1/r_\theta$, fig. 4.4d, ou dans le plan du parallèle, fig. 4.4a) ont des composantes sur l'axe z qui permettent d'équilibrer la charge p_z . L'équation d'équilibre $\sum F_z = 0$ prend la forme

$$\sum F_z = N_\varphi r d\theta d\varphi + N_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \sin \varphi + p_z r_\varphi r d\varphi d\theta = 0$$

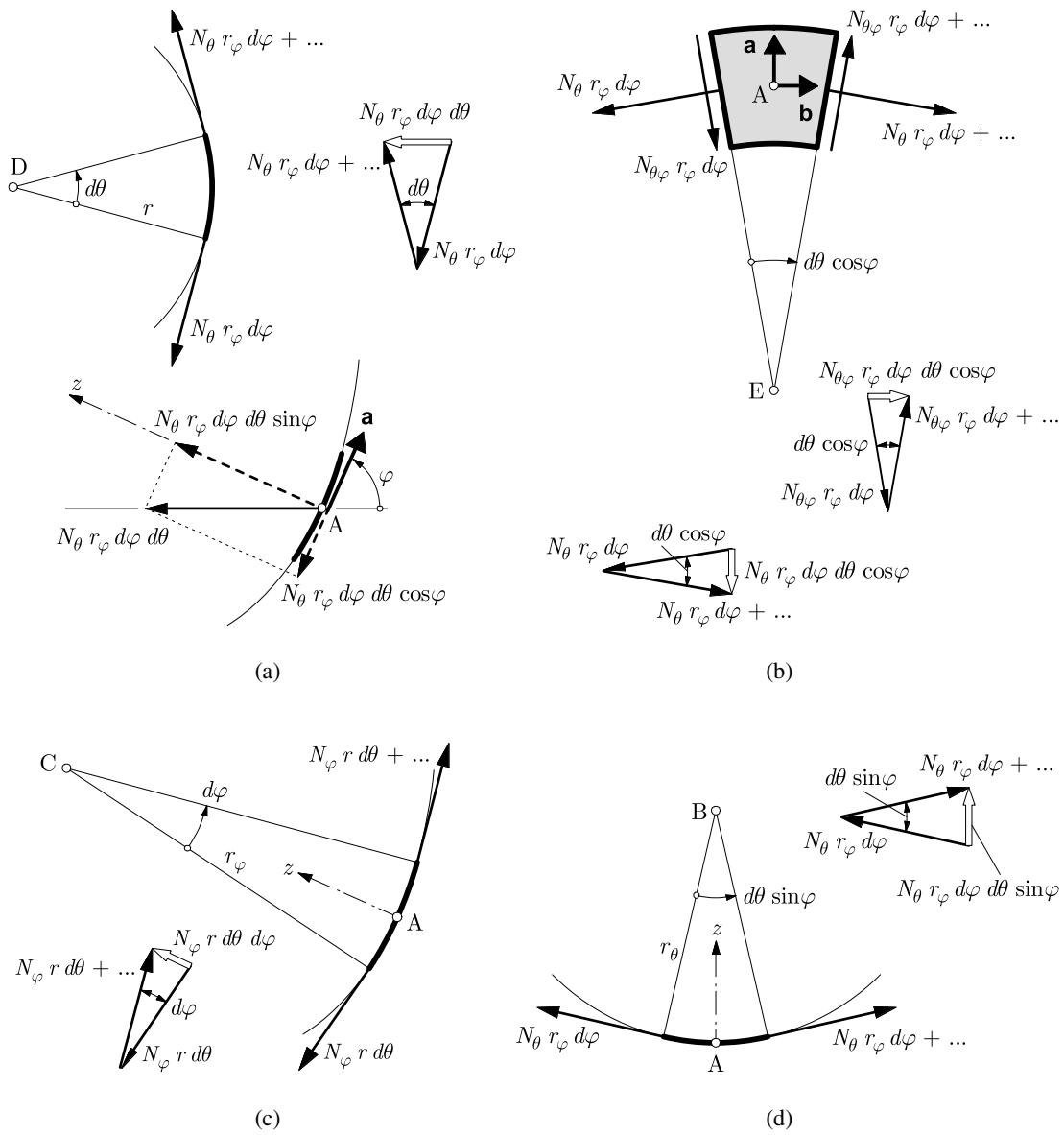


Fig. 4.4 Equilibre d'un élément de coque de révolution en théorie membranaire :
 (a) N_θ dans le plan du parallèle et du méridien ; (b) N_θ et $N_{\theta\varphi}$ dans le plan tangent ;
 (c) N_φ dans le plan méridien contenant la courbure $1/r_\varphi$;
 (d) N_θ dans le plan contenant la courbure $1/r_\theta$.

Après simplification des équations précédentes, avec (2.34) $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ et (4.1) $r = r_\theta \sin \varphi$, on obtient les *équations d'équilibre*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (rN_\varphi) + r_\varphi \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - r_\varphi N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r r_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (rN_{\theta\varphi}) + r_\varphi \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r_\varphi N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_\theta r r_\varphi &= 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Remarques

Quand, dans l'élément de coque, on passe du bord φ au bord $\varphi + d\varphi$, on a changement non seulement des efforts intérieurs ($N_\varphi, N_{\varphi\theta}$), mais aussi de la longueur du bord ($r d\theta$), raison pour laquelle r reste prisonnier de la dérivation par rapport à φ (§ 2.7.2, remarque).

Il est aisément, à l'aide des relations géométriques du paragraphe 1.7.9, en particulier (1.38) et (1.40), de déduire les équations (4.4) des équations (3.2), (3.3) et (3.4). Cependant, la dérivation ci-dessus a l'avantage de donner une signification physique à chacun des termes de (4.4).

4.4 Chargement de révolution

4.4.1 Équations d'équilibre

Lorsque la charge a également la symétrie de révolution, les efforts intérieurs sont constants le long d'un parallèle, et toutes les dérivées circonférentielles $\partial/\partial\theta$ s'annulent. Dans (4.4), il reste (φ seule variable)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (rN_\varphi) - r_\varphi N_\theta \cos \varphi + p_\varphi r r_\varphi &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (rN_{\theta\varphi}) + r_\varphi N_{\theta\varphi} \cos \varphi + p_\theta r r_\varphi &= 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

On observe que la seconde équation est découpée des deux autres. On peut donc traiter séparément les deux cas suivants :

- l'effort tangentiel $N_{\theta\varphi}$ dû à la composante p_θ ;
- les efforts normaux N_φ et N_θ dus aux composantes p_φ et p_z .

4.4.2 Effort tangentiel

Avec (4.3) $dr/d\varphi = r_\varphi \cos \varphi$, la seconde équation (4.5) peut s'écrire

$$\frac{d}{d\varphi} (r^2 N_{\theta\varphi}) = -p_\theta r^2 r_\varphi$$

et, après intégration, on obtient

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{1}{r^2} \left[\int_\varphi p_\theta r^2 r_\varphi d\varphi + C \right] \quad (4.6)$$

Cette équation décrit une *solicitation de torsion* de la coque autour de son axe. En effet, le crochet représente le moment résultant, agissant sur l'axe de révolution Z , des charges p_θ et d'un éventuel moment concentré C , et ce pour $\theta = 1$ radian (fig. 4.5a). Appelons $T_Z/(2\pi)$ cette résultante ; (4.6) devient

$$N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = -\frac{T_Z}{2\pi r^2} \quad (4.7)$$

et s'interprète comme suit : $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi}$ est le *flux de cisaillement équilibrant*, dans une section tronconique opérée au niveau d'un parallèle quelconque $\varphi = \text{cste}$, le *moment de torsion total* T_Z (fig. 4.5b).

On retrouve un résultat connu de la théorie de la torsion de Saint-Venant des structures tubulaires à parois minces ($f = T/2\Omega$ avec $\Omega = \pi r^2$, TGC vol. 2, § 8.7.2).

Le cas de charges p_θ est rare en pratique. Dans la suite, il est ignoré.

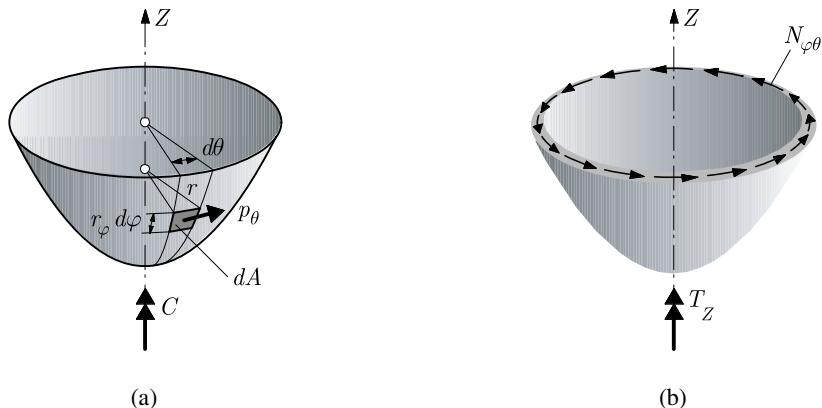


Fig. 4.5 Détermination de l'effort tangentiel $N_{\varphi\theta}$: (a) interprétation de l'équation (4.6) : $dA = (r_\varphi d\varphi)(r d\theta)$ et $dT_Z = \int_0^1 r p_\theta (r_\varphi r d\varphi d\theta) = p_\theta r^2 r_\varphi d\varphi$ (moment de torsion élémentaire sur 1 radian de parallèle) ; (b) solution de l'équation (4.6) par équilibre global et torsion d'une structure en caisson à paroi mince ($N_{\varphi\theta}$ est le flux de cisaillement).

4.4.3 Efforts normaux

Tirant N_θ de la troisième équation (4.5) et l'introduisant dans la première, on peut mettre l'équation différentielle obtenue sous la forme

$$\frac{d}{d\varphi} (rN_\varphi \sin \varphi) = -(p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi)r r_\varphi$$

dont la solution est (Q est la constante d'intégration)

$$N_\varphi = -\frac{1}{r \sin \varphi} \left[\int_\varphi (p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi)r r_\varphi d\varphi + Q \right] \quad (4.8)$$

Comme précédemment, on interprète le crochet de (4.8) comme la force résultante, sur l'axe Z , des composantes p_φ et p_z des charges appliquées d'une part, et d'une éventuelle force concentrée Q d'autre part, pour $\theta = 1$ radian (fig. 4.6a). Appelons $F_Z/(2\pi)$ cette résultante ; (4.8) s'écrit

$$N_\varphi = -\frac{F_Z}{2\pi r \sin \varphi} \quad (4.9)$$

et représente l'*équilibre axial de la coque* coupée au niveau du parallèle φ quelconque (fig. 4.6b).

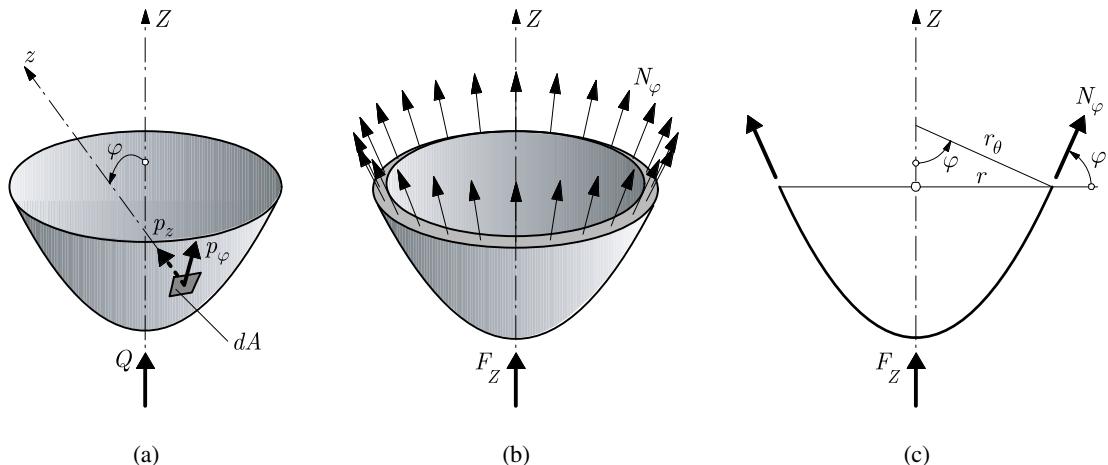


Fig. 4.6 Détermination de l'effort normal N_φ : (a) interprétation de l'équation (4.8) : $dF_Z = \int_0^1 (p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi)(r_\varphi r d\varphi d\theta) = (p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi)r r_\varphi d\varphi$ (force élémentaire sur 1 radian de parallèle) ; (b) solution de l'équation (4.8) par équilibre global selon Z ; (c) vue en coupe.

Lorsque N_φ est connu, l'effort normal N_θ se calcule à l'aide de la troisième équation (4.5)

$$N_\theta = -r_\theta \left(\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + p_z \right) \quad (4.10)$$

Remarque

Les équations (4.7), (4.9) et (4.10) donnent la *répartition des efforts membranaires* dans toute la coque. Leur emploi direct n'est possible que si la coque a un caractère isostatique (§ 3.2.3 et sect. 4.6) ; pratiquement, la coupe le long d'un parallèle doit isoler un fragment de coque. Cette coupe a une forme *tronconique* et est une généralisation de la notion de section droite (§ 1.2.3), propre aux coques de révolution. Enfin, dans (4.7) et (4.9), on travaille avec la *face positive* de la section (la normale extérieure pointe dans le sens croissant de φ).

4.5 Cinématique

La cinématique membranaire a été définie au paragraphe 3.2.1. Ici, on se place à nouveau dans le cas plus simple où le chargement possède la symétrie de révolution, avec en plus $p_\theta = 0$. (Pour le cas $p_\theta \neq 0$, voir Ex. 4.8.10.)

4.5.1 Déformations

On appelle u la composante méridienne (u selon φ) et w la composante normale (w selon z) du déplacement d'un point quelconque A de la surface moyenne de la coque (fig. 4.7a). Avec $p_\theta = 0$, l'effort tangentiel $N_{\varphi\theta}$ est nul et, par suite, le glissement $\gamma_{\varphi\theta}$ et le déplacement circonférentiel v sont nuls aussi. On examine la *dilatation méridienne* ε_φ et la *dilatation circonférentielle* ε_θ au travers de l'élément d'arc de méridien (4.2) $ds = r_\varphi d\varphi$ et du rayon r du parallèle.

Sous l'effet de la composante méridienne u seule (fig. 4.7b)

- l'élément d'arc s'allonge de du ,
- le rayon du parallèle s'accroît de $u \cos \varphi$;

sous l'effet de la composante normale w seule (fig. 4.7c)

- l'élément d'arc se raccourcit de $w d\varphi$,
- le rayon r diminue de $w \sin \varphi$.

Par cumul, en tenant compte des signes, les dilatations valent

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varphi &= \frac{du - w d\varphi}{r_\varphi d\varphi} = \frac{1}{r_\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u \cos \varphi - w \sin \varphi}{r} = \frac{1}{r_\theta} (u \operatorname{ctg} \varphi - w)\end{aligned}\tag{4.11}$$

Remarque

A nouveau, avec (1.38) et (1.40), on déduit aisément ces relations des formules générales (3.5). Toutefois, la dérivation proposée ci-dessus donne une signification physique à chacun des termes de (4.11).

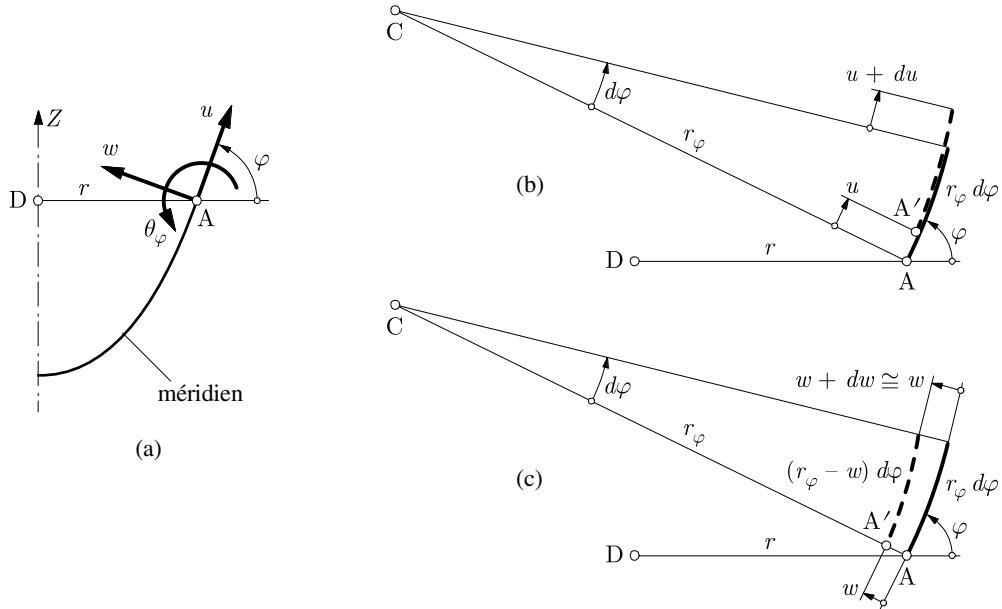


Fig. 4.7 Cinématique : (a) composantes du déplacement ; (b) cinématique sous le déplacement méridien seul ; (c) cinématique sous le déplacement normal seul.

4.5.2 Déplacements

Les déplacements u et w s'obtiennent en résolvant les équations (4.11). Tirant w de la seconde pour l'introduire dans la première, on obtient

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = \varepsilon_\varphi r_\varphi - \varepsilon_\theta r_\theta \quad (4.12)$$

Le second membre est une fonction de φ que l'on peut déterminer si les efforts normaux sont connus. En effet, la loi de Hooke (3.9)

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Et} (N_\varphi - \nu N_\theta) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{Et} (N_\theta - \nu N_\varphi) \quad (4.13)$$

permet de calculer

$$f(\varphi) = \varepsilon_\varphi r_\varphi - \varepsilon_\theta r_\theta = \frac{1}{Et} (N_\varphi (r_\varphi + \nu r_\theta) - N_\theta (r_\theta + \nu r_\varphi)) \quad (4.14)$$

La solution de l'équation différentielle linéaire (4.12) fournit la composante u

$$u = \left(\int_{\varphi} \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \right) \sin \varphi \quad (4.15)$$

où la constante C s'obtient par une condition de bord sur u . Connaissant u , on trouve w par la seconde équation (4.11)

$$w = u \operatorname{ctg} \varphi - \varepsilon_{\theta} r_{\theta} \quad (4.16)$$

où ε_{θ} est donné par la deuxième équation (4.13).

4.5.3 Déplacements en axes cartésiens, rotation et pente

Dans les calculs pratiques, on n'utilise guère les composantes curvilignes u et w du déplacement, mais plutôt les composantes cartésiennes u_X et w_Z :

- selon X , u_X est le déplacement *radial*,
- selon Z , w_Z est le déplacement *axial*.

Par une rotation d'angle φ (fig. 4.8), on a d'abord

$$\begin{aligned} u_X &= u \cos \varphi - w \sin \varphi \\ w_Z &= u \sin \varphi + w \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.17)$$

Puis, introduisant (4.15) et (4.16) dans ces relations, on trouve

$$u_X = \varepsilon_{\theta} r_{\theta} \sin \varphi = \varepsilon_{\theta} r \quad (4.18)$$

$$w_Z = \int_{\varphi} \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi - \varepsilon_{\theta} r_{\theta} \cos \varphi + C \quad (4.19)$$

Ces formules montrent que la constante C peut aussi se déterminer par une condition sur le déplacement axial w_Z (qui s'associe au seul mode rigide possible de la coque).

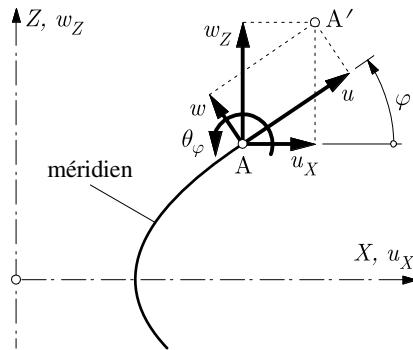


Fig. 4.8 Composantes du déplacement en coordonnées curvilignes (u, w) et cartésiennes (u_X, w_Z) .

Outre les translations, la rotation θ_φ , au point A, de la *normale*, ou de la *tangente*, au méridien (fig. 4.7a) est aussi un déplacement important à connaître. Suite aux deux déplacements u et w , cette rotation vaut (fig. 4.9)

$$\theta_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{u}{r_\varphi} + \frac{dw}{ds} \quad (4.20)$$

Cette relation montre que *la rotation n'est pas la simple variation de pente dw/ds* , mais comporte un terme supplémentaire u/r_φ provenant de la courbure du méridien.

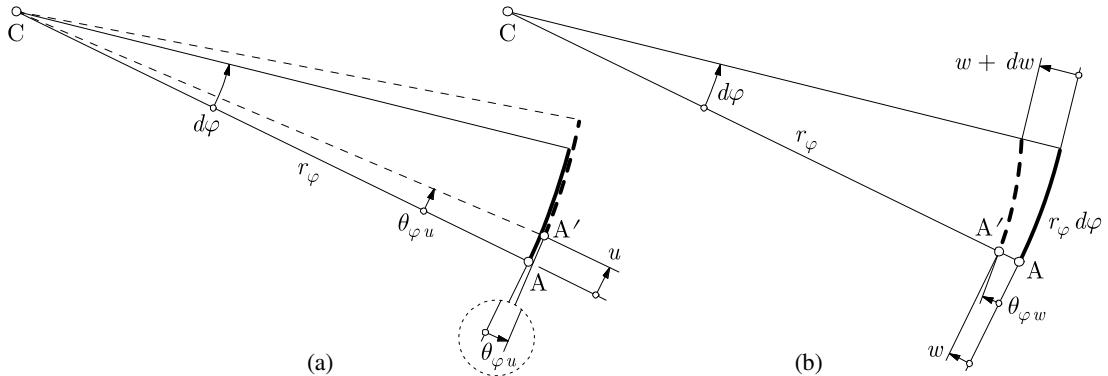


Fig. 4.9 Variation de l'angle d'inclinaison φ de la normale ou de la tangente au méridien
 $(\theta_\varphi = \theta_{\varphi u} + \theta_{\varphi w})$: (a) sous u : $\theta_{\varphi u} = u/r_\varphi$; (b) sous w : $\theta_{\varphi w} = dw/ds$.

En introduisant d'abord l'inverse de (4.17) dans (4.20), puis (4.18) et (4.19) dans la formule obtenue, on trouve

$$\theta_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left(\frac{dw_Z}{d\varphi} \cos \varphi - \frac{du_X}{d\varphi} \sin \varphi \right) = \frac{1}{r_\varphi} \left(f(\varphi) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d}{d\varphi} (\varepsilon_\theta r_\theta) \right) \quad (4.21)$$

et cette double relation donnant θ_φ permet de contrôler le calcul numérique.

Remarque

Une fois encore, on peut déduire (4.20) directement de la première équation (2.13) ou (3.8), et interpréter physiquement les deux termes de cette dernière par la figure 4.9.

4.6 Conditions aux limites

En se limitant au cas $p_\theta = 0$, les conditions aux limites ne peuvent porter que sur (§ 3.2.3)

$$N_\varphi \quad \text{ou} \quad u \quad (4.22)$$

en accord avec les équations différentielles correspondantes (une constante d'intégration Q ou C dans (4.8) ou (4.15) par exemple). Sur un bord, on ne peut donc imposer qu'une seule condition.

Si la coque a deux bords, deux cas sont possibles :

- l'une des conditions est cinématique et l'autre est statique : la coque est isostatique (fig. 4.10a) ;
- les deux conditions sont cinématiques et la coque est hyperstatique (fig. 4.10b).

Si la coque n'a qu'un bord (dôme), la condition doit être cinématique et la coque est isostatique (fig. 4.10c).

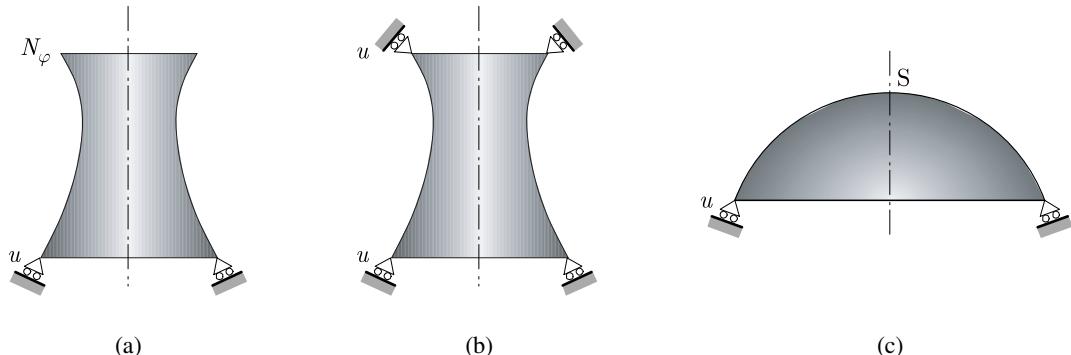


Fig. 4.10 Conditions aux limites pour les coques de révolution à chargement de révolution ($p_\theta = 0$) :
(a) deux bords, isostatique ; (b) deux bords, hyperstatique ; (c) un bord, isostatique.

Remarque

Quand il n'y a qu'un bord, une condition statique est implicitement contenue dans le sommet S du dôme (on peut toujours isoler un fragment élémentaire contenant S et en exprimer l'équilibre ; voir Ex. 4.8.8).

4.7 Application – Coque cylindrique (chargement de révolution)

4.7.1 Particularités de la coque cylindrique circulaire

La figure 4.11 définit la géométrie de la coque. Les méridiens sont rectilignes et parallèles à l'axe de révolution, ce qui permet de simplifier les équations.

La courbure méridienne étant nulle ($r_\varphi = \infty$), on abandonne la variable φ au profit de l'abscisse x le long du méridien, avec (4.2)

$$dx = r_\varphi d\varphi \quad (4.23)$$

Tout parallèle est un cercle de courbure principale, de sorte que $r_\theta = r = a$, où a est le rayon du cylindre.

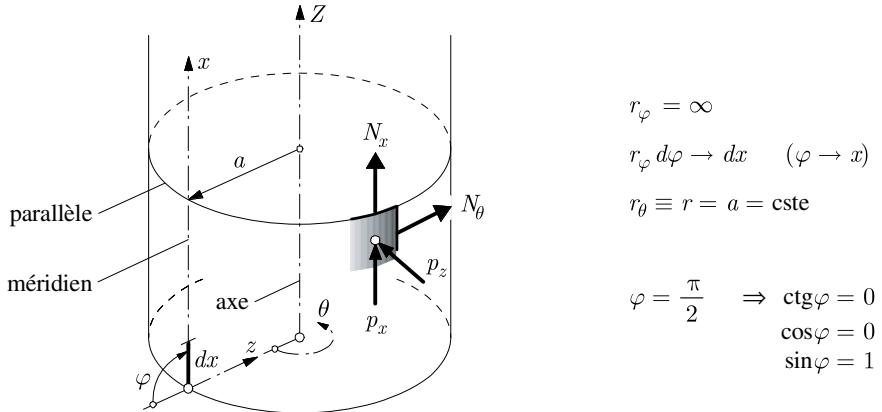


Fig. 4.11 Coque cylindrique circulaire.

Tenant compte de ces diverses propriétés, les équations (4.9), (4.10), (4.11), (4.20) et (4.13) deviennent :

- équilibre

$$N_x = -\frac{F_Z}{2\pi a} \quad N_\theta = -ap_z \quad (4.24)$$

- cinématique

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \varepsilon_\theta = -\frac{w}{a} \quad (4.25)$$

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} \quad (4.26)$$

- loi constitutive

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et} (N_x - \nu N_\theta) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{Et} (N_\theta - \nu N_x) \quad (4.27)$$

Ces équations représentent la *solution membranaire* de la coque cylindrique ; elles sont utiles dans l'étude de la coque cylindrique par la théorie flexionnelle (sect. 5.7 et 5.10).

4.7.2 Réservoir cylindrique

Un réservoir cylindrique (axe vertical, hauteur h , rayon a , épaisseur t constante ; fig. 4.12) est rempli d'un liquide de masse volumique ρ . La paroi est libre au sommet (réservoir ouvert ; condition statique $N_x = 0$) et sur appui mobile continu en base (condition cinématique membranaire $u = 0$). On suppose que le fond n'interagit pas avec la coque cylindrique. On désire analyser ce réservoir sous l'action du seul liquide contenu.

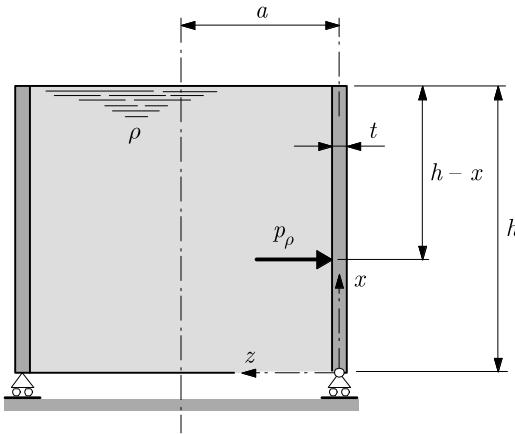


Fig. 4.12 Réservoir cylindrique sur appui membranaire.

A la cote x , la pression normale vaut (g est l'accélération de la pesanteur)

$$p_z = -p_\rho = -\rho g(h - x)$$

Les conditions aux limites du cylindre permettent le développement du seul état membranaire. On a, par (4.24),

$$N_x = 0 \quad N_\theta = -ap_z = a\rho g(h - x) \quad (4.28)$$

N_x est nul et N_θ décroît linéairement de $N_{\theta \text{ max}} = a\rho g h$ en $x = 0$ à $N_\theta = 0$ en $x = h$. Puis, par (4.25) et (4.27),

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} = -\frac{\nu}{Et} N_\theta = -\frac{\nu}{Et} a\rho g(h - x) \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{w}{a} = \frac{1}{Et} N_\theta = \frac{1}{Et} a\rho g(h - x) \end{aligned}$$

La première relation fournit, en intégrant,

$$u = \frac{\nu}{Et} a\rho g \int (x - h) dx = \frac{\nu}{Et} a\rho g \left(\frac{(x - h)^2}{2} + C \right)$$

La constante d'intégration C se détermine par la condition cinématique $u = 0$ sur le bord appuyé $x = 0$, qui donne $C = -h^2/2$; d'où

$$u = -\frac{\nu}{Et} \frac{a\rho g}{2} x(2h - x) \quad (4.29)$$

u varie paraboliquement de $u = 0$ en $x = 0$ à $u_{\text{max}} = -(\nu/Et)(a\rho g/2)h^2$ en $x = h$.

La deuxième relation fournit directement

$$w = -\frac{a^2 \rho g}{Et} (h - x) \quad (4.30)$$

w varie linéairement de $w_{\max} = -(a^2 \rho g / Et)h$ en $x = 0$ à $w = 0$ en $x = h$.

Enfin, par (4.26),

$$\theta_x = \frac{a^2 \rho g}{Et} = \text{cste} \quad (4.31)$$

La figure (4.13) montre la solution membranaire du réservoir circulaire.

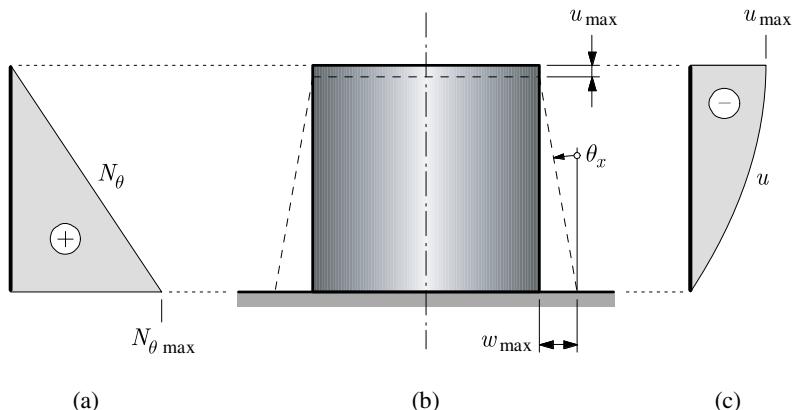


Fig. 4.13 Réservoir circulaire en théorie membranaire : (a) effort normal circonférentiel N_θ ; (b) déformée ; (c) variation du déplacement méridien u .

Exemple 4.1

On considère un réservoir circulaire en béton pour lequel $a = 400$ cm, $h = 800$ cm, $t = 20$ cm, $E = 2100$ kN/cm², $\nu = 0,2$ et $\rho g = 10^{-5}$ kN/cm³ (eau).

Ces données permettent de calculer les valeurs numériques de l'effort et des déplacements

$$N_{\theta \max} = 3,20 \text{ kN/cm}$$

$$u_{\max} = -0,0061 \text{ cm} \quad w_{\max} = -0,0305 \text{ cm} \quad \theta_x = 0,381 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

de la théorie membranaire à l'aide des relations (4.28) à (4.31).

La contrainte de traction dans le béton est de 160 N/cm².

4.8 Exercices

4.8.1 On considère un réservoir de révolution, de méridien arbitraire, soumis à une pression interne p . En théorie membranaire, montrer que les contraintes méridienne et circonférentielle, ainsi que le déplacement radial, sont donnés par les relations

$$\sigma_\varphi = \frac{p r_\theta}{2t} \quad \sigma_\theta = \frac{p r_\theta}{2t} \left(2 - \frac{r_\theta}{r_\varphi} \right) \quad u_x = \frac{p r_\theta r}{2Et} \left(2 - \nu - \frac{r_\theta}{r_\varphi} \right)$$

4.8.2 On plonge une sphère en acier, de rayon $a = 200$ cm, sous 2 000 m d'eau. Si la contrainte normale dans l'acier est limitée à 10 kN/cm^2 , calculer l'épaisseur t nécessaire. Qu'en est-il de l'hypothèse : *les charges agissent sur la surface moyenne* (§ 2.4.3) ?

Note : utiliser les formules de l'exercice 4.8.1.

4.8.3 Un récipient cylindrique de révolution en tôle d'acier est fermé par une calotte sphérique et une calotte ellipsoïdale (fig. Ex. 4.8.3). Le cylindre et les calottes ont la même épaisseur t . Ce récipient est soumis à une pression interne p . Calculer les déplacements utiles qui permettent d'esquisser la déformée membranaire du récipient. Observer les discontinuités cinématiques.

Note : utiliser les formules de l'exercice 4.8.1.

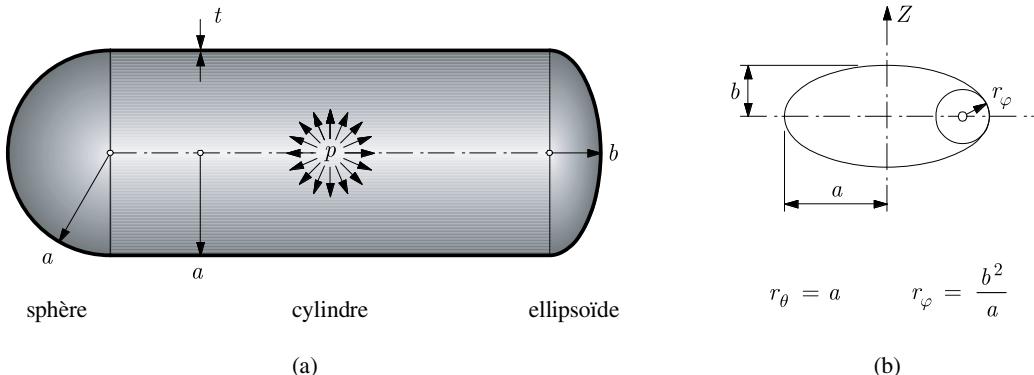


Fig. Ex. 4.8.3 Récipient sous pression :

(a) coupe longitudinale ; (b) rayons de courbure de l'ellipsoïde au niveau de l'équateur.

4.8.4 Un réservoir sphérique, de rayon a et d'épaisseur t , est appuyé tout le long de l'équateur (fig. Ex. 4.8.4). Il est soumis à son seul poids propre (réservoir vide). Faire l'étude membranaire de cette coque sphérique.

- 1) Modéliser le réservoir.
- 2) Calculer en tout point, en fonction de φ , a , t et du poids volumique γ du matériau,
 - les efforts normaux N_φ et N_θ ;
 - la réaction d'appui.
- 3) Dessiner les diagrammes de N_φ et N_θ dans une coupe méridienne du réservoir (N_φ à droite et N_θ à gauche) ; chercher les points particuliers et commenter les discontinuités.

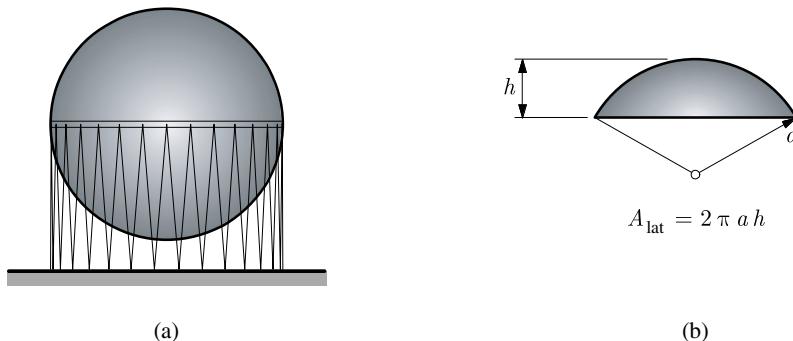


Fig. Ex. 4.8.4 Réservoir sphérique : (a) vue ; (b) aire d'une calotte sphérique.

4.8.5 Un réservoir de révolution en tôle d'acier d'épaisseur t est constitué d'un cylindre et d'un fond en forme de cône (fig. Ex. 4.8.5). Faire l'étude membranaire de la partie conique de ce réservoir.

- 1) Modéliser le cône.
- 2) Pour un cône, il faut abandonner la variable angulaire φ au profit de l'abscisse s sur le méridien ; en utilisant la relation (4.2), réécrire les formules nécessaires.
- 3) Pour le seul cas de charge du poids de l'acier (poids volumique γ_a), calculer les efforts intérieurs N_s ($= N_\varphi$) et N_θ ; les représenter graphiquement.
- 4) Calculer les déplacements correspondants u_x et θ_s ($= \theta_\varphi$).

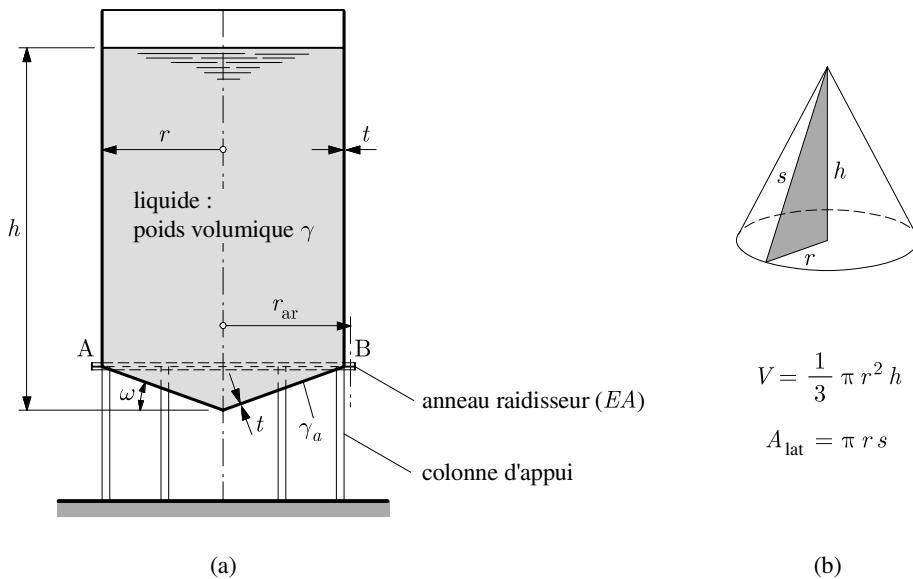


Fig. Ex. 4.8.5 Réservoir : (a) vue en coupe ; (b) volume et aire latérale d'un cône.

4.8.6 On reprend le réservoir de l'exercice 4.8.5, mais soumis maintenant au seul cas de charge du liquide contenu (poids volumique γ).

- 1) Calculer les efforts membranaires N_s et N_θ dans le cône.
- 2) Calculer les déplacements membranaires u_x et θ_s du cône.
- 3) Calculer l'effort normal et le déplacement radial de l'anneau raidisseur AB.

On continue avec les données numériques suivantes :

- réservoir : $r = 4 \text{ m}$; $h = 12 \text{ m}$; $\omega = 20^\circ$;
- anneau raidisseur : $r_{ar} = 4,10 \text{ m}$; $A = 200 \text{ cm}^2$;
- acier : $\sigma_{\text{adm}} = 10 \text{ kN/cm}^2$; $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$;
- liquide : $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$.

- 4) Trouver l'épaisseur nécessaire t de la tôle d'acier (en mm ; arrondir à la cote paire supérieure pour la question suivante).
- 5) Le long du parallèle d'appui AB, calculer les déplacements membranaires du cône, du cylindre (§ 4.7.2) et du raidisseur ; comparer et commenter les résultats.

4.8.7 Une coque conique, de hauteur H et d'angle au sommet 2ω (fig. Ex. 4.8.7), est remplie d'un liquide de poids volumique γ sur une hauteur h ($h < H$). Cette coque est soutenue par un anneau appuyé sur tout le pourtour.

- 1) Trouver l'expression des efforts N_φ et N_θ en tout point du méridien, sous l'action du liquide, en fonction de la cote Z mesurée à partir du sommet S.
- 2) Trouver les extréums de ces efforts.
- 3) Dessiner le diagramme de ces efforts.
- 4) Trouver l'effort de compression dans l'anneau d'appui.

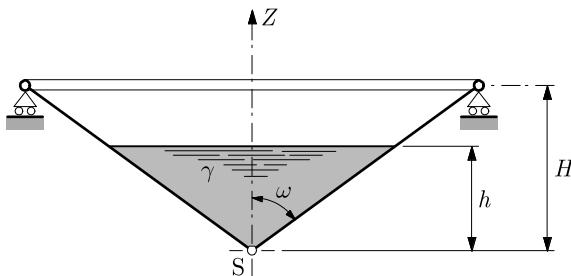


Fig. Ex. 4.8.7

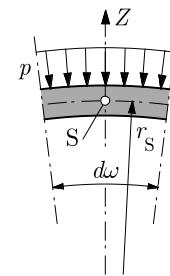


Fig. Ex. 4.8.8

4.8.8 On considère une coque en forme de dôme sous charge de surface répartie p (cf. fig. 4.10c). Trouver, sur l'axe de révolution, c'est-à-dire au sommet S, la valeur des efforts intérieurs N_φ et N_θ en faisant l'équilibre d'une calotte élémentaire voisine de S (fig. Ex. 4.8.8).

4.8.9 Pour entreprendre l'étude membranaire d'un dôme en paraboloid de révolution (fig. Ex. 4.8.9), d'épaisseur constante t , on le place dans les axes (X, Z), on prend, comme équation du méridien (parabole), la relation

$$Z = \frac{X^2}{2a}$$

où a est le rayon de courbure au sommet S (*paramètre de la parabole*), et on exprime les grandeurs cherchées en fonction de a et φ .

- 1) Donner l'expression des rayons de courbure principaux en tout point de la coque.
- 2) Trouver la réaction d'appui A (force par unité de longueur sur le parallèle d'appui AA) due au poids propre (poids volumique γ selon Z^+).
- 3) Sous l'action d'une force concentrée Q au sommet, calculer les efforts intérieurs et le déplacement horizontal (radial) en tout point ; que se passe-t-il au voisinage du sommet ?

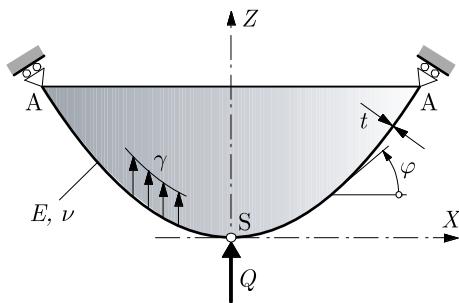


Fig. Ex. 4.8.9

4.8.10 Calculer le champ du déplacement v d'une coque de révolution soumise au seul cas de charge p_θ ($p_\varphi = p_z = 0$).

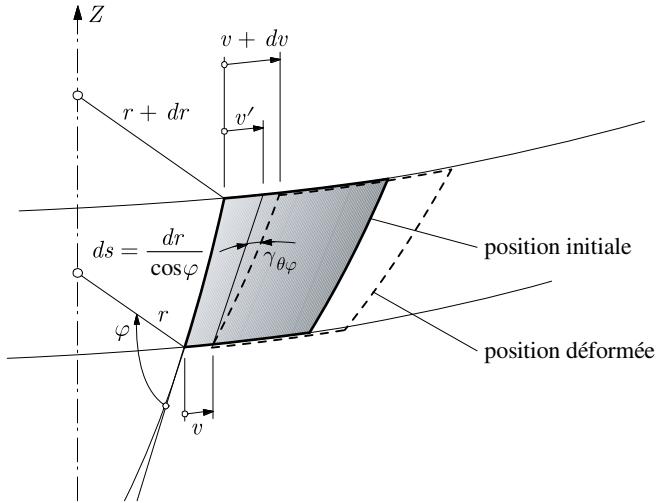


Fig. Ex. 4.8.10

Solution. Il s'agit de la sollicitation de torsion (§ 4.4.2) pour laquelle seuls $N_{\theta\varphi}$ et, par suite, $\gamma_{\theta\varphi}$ et v sont présents. Il faut trouver l'expression du glissement. Pour l'obtenir, on doit soustraire v' (et non v !) de $v + dv$ (fig. Ex. 4.8.10).

On a $v/r = v'/(r + dr)$; d'où $v' = v(1 + dr/r)$. Alors

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{v + dv - v'}{ds} = \frac{dv}{ds} - \frac{v}{r} \frac{dr}{ds} = \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) \cos \varphi$$

On peut contrôler cette valeur par (3.6). Avec la troisième équation (3.9) $\gamma_{\theta\varphi} = N_{\theta\varphi}/Gt$ et $N_{\theta\varphi}$ connu par (4.7), l'équation différentielle donnant le déplacement v est

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{N_{\theta\varphi}}{Gt \cos \varphi}$$

d'où, après intégration,

$$v = r \left(\int_\varphi \frac{N_{\theta\varphi}}{Gtr \cos \varphi} dr + C \right)$$

5 Coques de révolution

Théorie flexionnelle sous chargement de révolution

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on n'a pas tenu compte de l'état flexionnel ; les solutions obtenues sont certes simples, mais peuvent conduire à des incompatibilités cinématiques (§ 3.2.4 ; sect. 4.8). De plus, les discontinuités liées à certaines charges ne peuvent être traduites correctement par une théorie purement membranaire (charge répartie le long d'un parallèle par exemple). Il est donc nécessaire de compléter l'analyse par l'étude de la théorie flexionnelle.

On examine ici les coques de révolution dont le chargement obéit aussi à la symétrie de révolution, supposant à nouveau que $p_\theta = 0$ (cette composante de charge ne provoque aucune flexion, mais seulement une torsion membranaire de la coque). Ce cas se produit fréquemment en pratique : poids propre, force centrifuge, pression interne ou externe, poids d'un fluide, poussée et friction des matières contenues ou retenues, précontrainte circonférentielle, variation uniforme de température, etc.

5.2 Géométrie, charges et efforts intérieurs

La figure 5.1(a) montre la géométrie de la coque, un élément isolé et ses composantes de charge ($p_\varphi dA$ et $p_z dA$). Des huit efforts intérieurs de coque, il ne subsiste que N_φ , N_θ , M_φ , M_θ et V_φ ; la figure 5.1(b) donne les forces agissant sur l'élément, dues à ces cinq efforts.

La *symétrie de révolution* conduit en effet aux propriétés suivantes (indépendance vis-à-vis de la coordonnée θ) :

- en tout point de la coque

$$V_\theta = 0 \quad M_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = 0 \quad (5.1)$$

et, puisque $p_\theta = 0$, on a encore

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = 0 \quad (5.2)$$

- le long d'un parallèle, de plus,

$$N_\theta = \text{cste} \quad M_\theta = \text{cste} \quad (5.3)$$

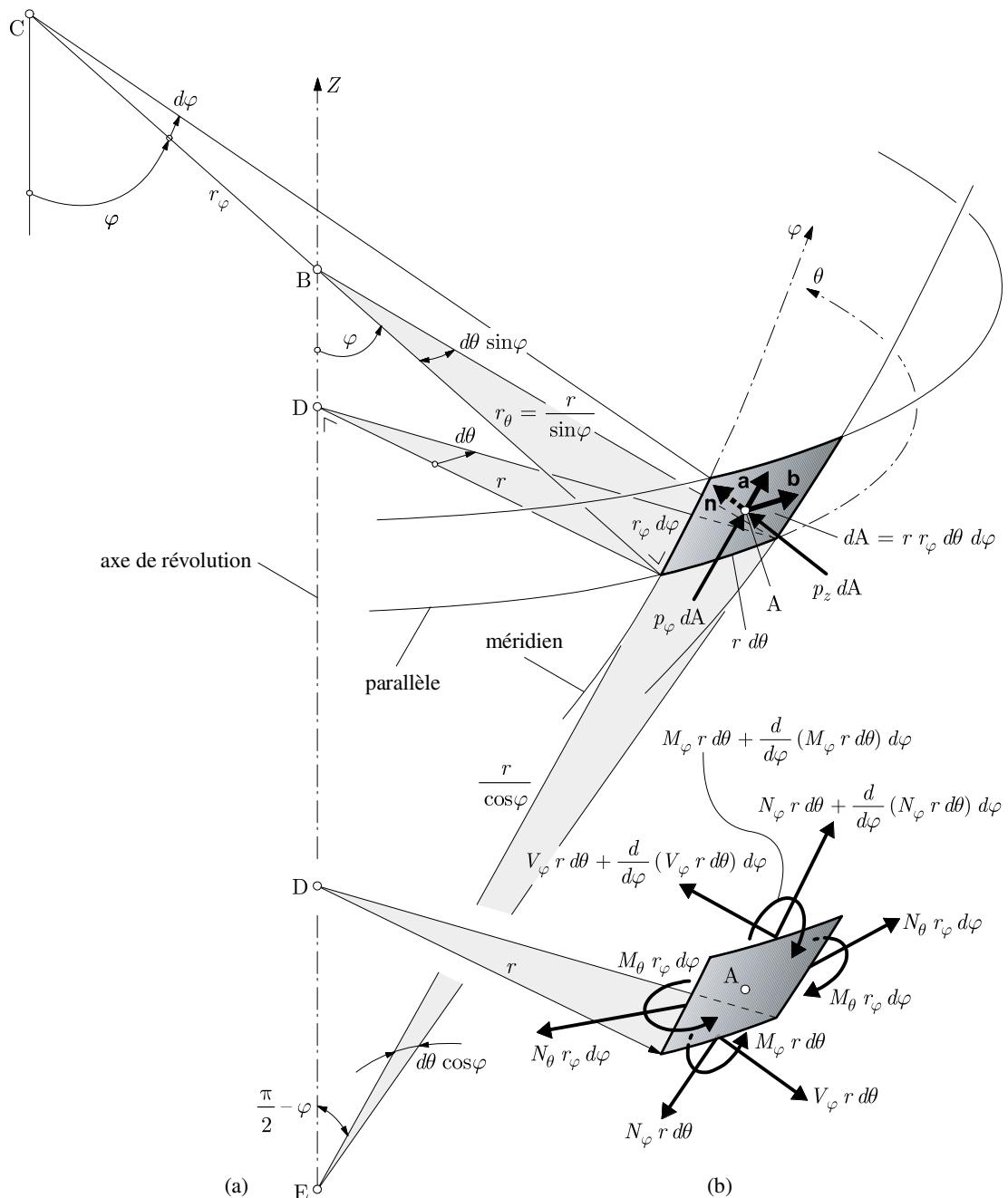


Fig. 5.1 Coque de révolution en théorie flexionnelle :
(a) géométrie et charges ; (b) efforts intérieurs sur un élément de coque.

De la symétrie, on conclut encore qu'il n'y a que trois équations d'équilibre ($\sum F_\varphi = 0$, $\sum F_z = 0$, $\sum M_\theta = 0$); elles sont insuffisantes pour déterminer les cinq efforts intérieurs en présence.

5.3 Equations d'équilibre

La théorie membranaire fournit la contribution membranaire des équations d'équilibre de translation (sect. 4.3), représentée ici par; il faut toutefois tenir compte de la condition de symétrie de révolution, en particulier (5.2), qui fait tomber le second terme de l'équation d'équilibre $\sum F_\varphi = 0$.

Aux termes restants de cette première équation s'ajoute la contribution produite par l'effort tranchant V_φ , comme le montre la figure 5.2(a); d'où

$$\sum F_\varphi = - V_\varphi r d\theta d\varphi = 0$$

De même, cet effort tranchant contribue aussi à la troisième équation $\sum F_z = 0$ par

$$\sum F_z = - V_\varphi r d\theta + V_\varphi r d\theta + \frac{d}{d\varphi} (V_\varphi r d\theta) d\varphi = 0$$

L'équation d'équilibre $\sum M_\theta = 0$ (rotation autour de **b**) s'écrit

$$\begin{aligned} \sum M_\theta &= M_\varphi r d\theta + \frac{d}{d\varphi} (M_\varphi r d\theta) d\varphi - M_\varphi r d\theta \\ &\quad - V_\varphi r d\theta r_\varphi d\varphi - M_\theta r_\varphi d\varphi d\theta \cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

où le dernier terme est la contribution du moment M_θ due au non-parallélisme des côtés mériadiens de l'élément de coque (fig. 5.2b).

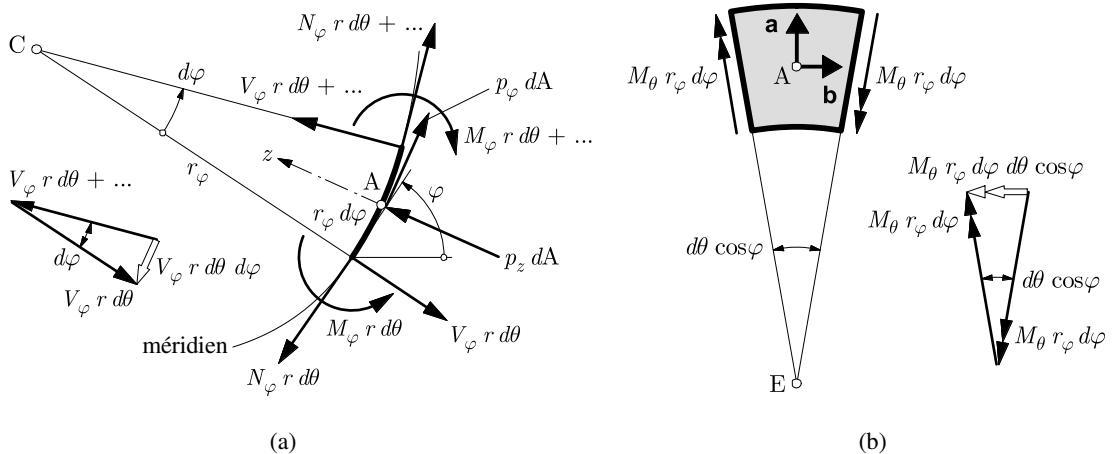


Fig. 5.2 Equilibre d'un élément de coque de révolution en théorie flexionnelle :
(a) plan mériadien ; (b) plan tangent.

Après simplification des trois équations précédentes et division par $d\varphi d\theta$, on obtient les *équations d'équilibre*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (rN_\varphi) - r_\varphi N_\theta \cos \varphi - rV_\varphi + p_\varphi r r_\varphi &= 0 \\ rN_\varphi + r_\varphi N_\theta \sin \varphi + \frac{d}{d\varphi} (rV_\varphi) + p_z r r_\varphi &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (rM_\varphi) - r_\varphi M_\theta \cos \varphi - r r_\varphi V_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec, encore, (4.1) $r = r_\theta \sin \varphi$.

5.4 Cinématique

5.4.1 Dilatations et rotation

Les dilatations ε_φ et ε_θ d'une part, et la rotation de la normale (ou de la tangente) θ_φ d'autre part, se calculent comme en théorie membranaire (sect. 4.5). On a donc

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left(\frac{du}{d\varphi} - w \right) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r_\theta} (u \operatorname{ctg} \varphi - w) \quad (5.5)$$

$$\theta_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right) \quad (5.6)$$

5.4.2 Variations de courbure cinématique

On peut établir l'expression des variations c_φ et c_θ de la courbure cinématique par un raisonnement géométrique. Sur la figure 5.3, le nouveau rayon de courbure r'_φ du méridien, en configuration déformée, est tel que

$$r'_\varphi (d\varphi + d\theta_\varphi) = (1 + \varepsilon_\varphi) r_\varphi d\varphi$$

et pour le nouveau rayon de courbure r'_θ , on a

$$r'_\theta \sin(\varphi + \theta_\varphi) = r + dr$$

d'où

$$\begin{aligned} c_\varphi &= \frac{1}{r'_\varphi} - \frac{1}{r_\varphi} = \frac{d\varphi + d\theta_\varphi}{(1 + \varepsilon_\varphi) r_\varphi d\varphi} - \frac{1}{r_\varphi} \\ c_\theta &= \frac{1}{r'_\theta} - \frac{1}{r_\theta} = \frac{\sin(\varphi + \theta_\varphi)}{r + dr} - \frac{1}{r_\theta} \end{aligned}$$

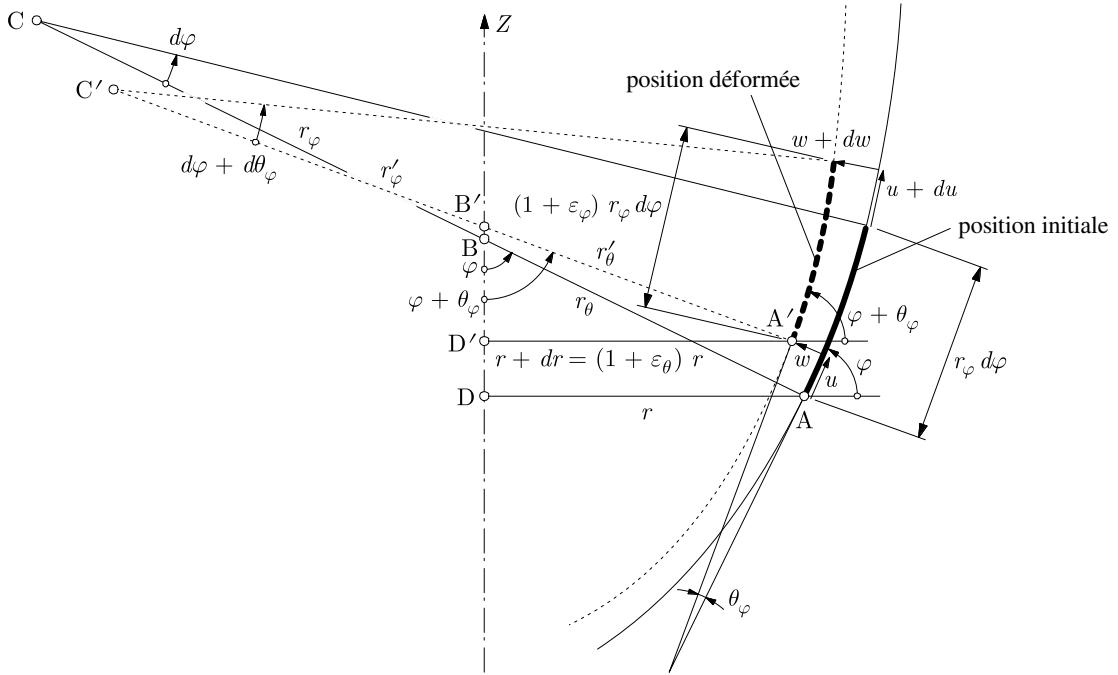


Fig. 5.3 Variation des rayons de courbure associée aux déplacements (dessin dans le plan méridien).

Dans ces expressions, on peut admettre, puisque ε_φ , ε_θ et θ_φ sont petits,

$$(1 + \varepsilon_\varphi) r_\varphi \cong r_\varphi \quad r + dr = (1 + \varepsilon_\theta) r \cong r$$

$$\sin(\varphi + \theta_\varphi) = \sin \varphi \cos \theta_\varphi + \cos \varphi \sin \theta_\varphi \cong \sin \varphi + \theta_\varphi \cos \varphi$$

où $\cos \theta_\varphi \cong 1$ et $\sin \theta_\varphi \cong \theta_\varphi$; alors, avec (4.1) $r = r_\theta \sin \varphi$,

$$c_\varphi = \frac{d\varphi + d\theta_\varphi}{r_\varphi d\varphi} - \frac{1}{r_\varphi} = \frac{1}{r_\varphi} \frac{d\theta_\varphi}{d\varphi}$$

$$c_\theta = \frac{\sin \varphi + \theta_\varphi \cos \varphi}{r_\theta \sin \varphi} - \frac{1}{r_\theta} = \frac{\theta_\varphi}{r_\theta} \operatorname{ctg} \varphi \quad (5.7)$$

Remarque

On peut contrôler que les relations (5.7) sont correctes à partir des formules (2.22) de la théorie générale : ce contrôle est quasi indispensable pour s'assurer de la pertinence des simplifications introduites.

5.5 Loi constitutive

En l'absence des efforts tangentiels et des moments de torsion, la loi constitutive (2.51) se réduit à

$$\begin{aligned} N_\varphi &= C(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) & M_\varphi &= D(\psi_\varphi + \nu \psi_\theta) \\ N_\theta &= C(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) & M_\theta &= D(\psi_\theta + \nu \psi_\varphi) \end{aligned} \quad (5.8)$$

où ψ_φ et ψ_θ sont les variations de la courbure statique.

Rappelons que les variations de courbure associées aux moments et à la loi constitutive (ψ_φ et ψ_θ) sont de signe opposé à celles exprimées en fonction des déplacements (c_φ et c_θ) (sect. 2.8)

$$\psi_\varphi = -c_\varphi \quad \psi_\theta = -c_\theta \quad (5.9)$$

5.6 Bilan et conditions aux limites

On dispose de douze équations (5.4) à (5.8) pour les douze inconnues N_φ , N_θ , M_φ , M_θ , V_φ , ε_φ , ε_θ , c_φ ou ψ_φ , c_θ ou ψ_θ , u , w et θ_φ .

Ces équations forment un système différentiel d'ordre 6. En conséquence, *on doit exprimer trois conditions aux limites sur un parallèle formant bord*. Ces conditions peuvent porter sur

- les efforts intérieurs

$$N_\varphi, \quad V_\varphi, \quad M_\varphi \quad (5.10)$$

- les déplacements

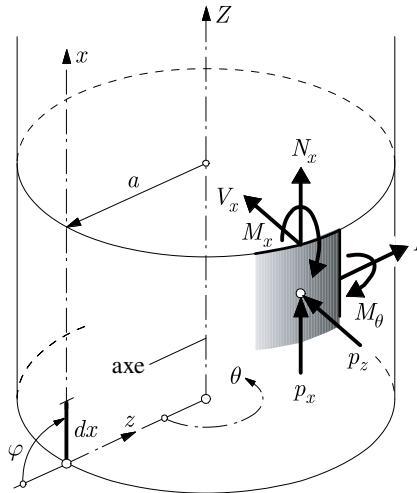
$$u, \quad w, \quad \theta_\varphi \quad (5.11)$$

5.7 Coque cylindrique

5.7.1 Equations générales

La coque cylindrique circulaire est d'un emploi très fréquent (réservoirs, récipients sous pression, conduites, etc.) et facile à construire grâce aux génératrices rectilignes (mise en forme des tôles, coffrage du béton, etc.). A cause du méridien rectiligne et parallèle à l'axe de révolution, l'étude se simplifie et conduit à *deux propriétés valables pour toutes les coques de révolution : effet de bord* (sect. 5.8) et *superposition* (sect. 5.9).

La figure 5.4 définit la géométrie et rappelle les diverses propriétés de la coque cylindrique circulaire (§ 4.7.1). Ce qui s'appelait méridien devient *axial* (ou longitudinal, selon x), et normal se confond avec *radial* (selon z).



$$\begin{aligned}r_\varphi &= \infty \\r_\varphi d\varphi &\rightarrow dx \quad (\varphi \rightarrow x) \\r_\theta \equiv r &= a = \text{cste}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} \varphi &= 0 \\ \cos \varphi &= 0 \\ \sin \varphi &= 1\end{aligned}$$

méridien → axial
normal → radial

Fig. 5.4 Coque cylindrique circulaire en théorie flexionnelle.

En tenant compte de ces diverses particularités, on peut réécrire toutes les équations relatives à l'équilibre, la cinématique et la loi constitutive, utiles à l'analyse flexionnelle des coques cylindriques circulaires.

Equilibre

A partir de (5.4), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dx} + p_x &= 0 \\ N_\theta + a \frac{dV_x}{dx} + ap_z &= 0 \\ \frac{dM_x}{dx} - V_x &= 0\end{aligned}\tag{5.12}$$

On constate que M_θ n'apparaît pas et que la première équation est découpée des deux autres ; elle donne, en intégrant,

$$N_x = - \int_x p_x dx + C\tag{5.13}$$

ce qui est l'équation d'équilibre axial (4.8) déjà rencontrée au paragraphe 4.4.3. On peut donc calculer N_x par équilibre global indépendamment des autres efforts intérieurs (on admet que les conditions aux limites le permettent ; sect. 4.6).

Cinématique

On trouve aisément, via (5.5), (5.6) et (5.7),

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} & \varepsilon_\theta &= -\frac{w}{a} & \theta_x &= \frac{dw}{dx} \\ c_x &= -\psi_x = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} & c_\theta &= -\psi_\theta = 0\end{aligned}\tag{5.14}$$

Loi constitutive

Puisque ψ_θ est nul, il reste, dans (5.8),

$$\begin{aligned}N_x &= C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta) & M_x &= D\psi_x \\ N_\theta &= C(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x) & M_\theta &= D\nu\psi_x = \nu M_x\end{aligned}\tag{5.15}$$

avec, pour rappel (2.52),

$$C = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

On voit que M_θ se déduit directement de M_x parce que $\psi_\theta = 0$.

5.7.2 Formulation en déplacement (équation différentielle de la coque cylindrique)

Le découplage de la première équation d'équilibre (5.12) des deux autres permet de traiter séparément les charges axiales p_x des charges radiales p_z . Cette simplification n'est toutefois pas décisive et on n'en tient pas compte ici. Néanmoins, *on suppose que N_x est connu*, c'est-à-dire que la coque a un caractère isostatique vis-à-vis de N_x .

Le problème de la coque cylindrique comporte alors neuf inconnues : N_θ , M_x , V_x , ε_x , ε_θ , θ_x , c_x ou ψ_x , u et w . Il est aisément d'éliminer les huit premières au profit de w .

On se défaît des déformations ε_x , ε_θ , c_x et de la rotation θ_x (5.14) en les introduisant dans la loi constitutive (5.15)

$$N_x = C\left(\frac{du}{dx} - \nu\frac{w}{a}\right) \quad N_\theta = C\left(\nu\frac{du}{dx} - \frac{w}{a}\right) \quad M_x = -D\frac{d^2w}{dx^2}\tag{5.16}$$

et il reste cinq inconnues : N_θ , M_x , V_x , u et w .

On élimine du/dx des relations (5.16) en multipliant la première par ν et en la soustrayant de la seconde ; avec $C = Et/(1 - \nu^2)$, il vient

$$N_\theta = -\frac{Et}{a}w + \nu N_x\tag{5.17}$$

Dans (5.12), on tire V_x de la troisième équation et on le remplace dans la deuxième

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{a}N_\theta + p_z = 0$$

Enfin, on introduit M_x (troisième relation (5.16)) et N_θ (5.17) dans cette dernière équation ; on obtient

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Et}{a^2} w = p^* \quad (5.18)$$

avec

$$p^* = p_z + \frac{\nu}{a} N_x \quad (5.19)$$

Dans (5.18), $w(x)$ est la seule inconnue. La résolution de cette équation donne la solution du problème : $w(x)$ connu, tout peut s'en déduire.

5.7.3 Cas $t = \text{cste}$, $E = \text{cste}$ et $\nu = \text{cste}$

Pour un cylindre d'épaisseur de paroi constante et fait d'un seul matériau ($D = \text{cste}$), l'équation (5.18) devient

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{a^2} w = p^* \quad (5.20)$$

En introduisant le paramètre non dimensionnel

$$\lambda^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{t} \right)^2 = \frac{Eta^2}{4D} \quad (5.21)$$

l'équation (5.20) peut s'écrire

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \frac{\lambda^4}{a^4} w = \frac{p^*}{D} \quad (5.22)$$

La solution de (5.22) est

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) \quad (5.23)$$

où

- w_0 est la solution générale de l'équation sans second membre, appelée par concision *solution homogène*, contenant quatre constantes C_1 à C_4 ;
- w_1 est une solution particulière attachée au second membre p^*/D ;
- les constantes d'intégration C_1 à C_4 se déterminent par les conditions aux limites portant sur $w = w_0 + w_1$.

Pour simplifier l'écriture ultérieure, posons encore (coordonnée non dimensionnelle)

$$\xi = \lambda \frac{x}{a} \quad (5.24)$$

L'équation homogène s'écrit

$$\frac{d^4 w_0}{d\xi^4} + 4w_0 = 0$$

et sa solution est

$$w_0(\xi) = e^\xi (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi) + e^{-\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) \quad (5.25)$$

Remarques

Si $N_x = 0$ (charge radiale p_z seule ; $p_x = 0$), on a, par (5.17),

$$N_\theta = -\frac{Et}{a} w \quad (5.26)$$

et N_θ est proportionnel à w .

L'équation différentielle (5.18) ou (5.22) étant d'ordre 4, on doit exprimer deux conditions aux limites sur chaque parallèle de bord pour déterminer les quatre constantes C_1 à C_4 . Ces conditions portent sur w et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3. La première dérivée est attachée à la rotation θ_x par (5.14), la seconde au moment M_x par (5.16) et la troisième à l'effort tranchant V_x (obtenu en introduisant M_x de (5.16) dans la troisième équation (5.12)) par

$$V_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (5.27)$$

L'équation (5.22) est de même structure que celle qui gouverne la déformée w des poutres prismatiques sur appui élastique continu. En considérant la coque comme formée d'un faisceau de poutres longitudinales (de raideur flexionnelle D) s'appuyant continûment sur des anneaux, on peut vérifier, dans (5.20), que le coefficient Et/a^2 – correspondant au module de fondation – s'associe bien à la raideur extensionnelle d'un anneau (troisième relation (6.2), sect. 6.2).

5.7.4 Particularités de la solution homogène w_0

On considère un cylindre de hauteur h (fig. 5.5), et on pose

$$x' = h - x \quad (5.28)$$

puis

$$\xi' = \lambda \frac{x'}{a} \quad (5.29)$$

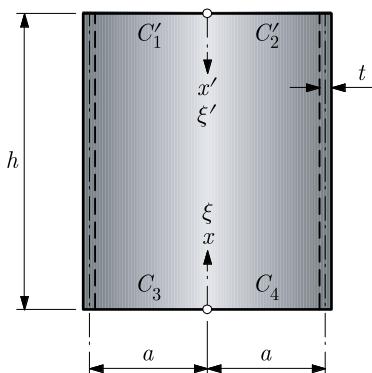


Fig. 5.5 Axes x et x' liés aux bords inférieur et supérieur pour la solution w_0 de la coque cylindrique circulaire.

Alors

$$\xi = \lambda \frac{x}{a} = \frac{h}{a} \lambda - \xi'$$

et on vérifie aisément que la solution de l'équation homogène w_0 peut aussi s'écrire

$$w_0 = e^{-\xi'} (C'_1 \cos \xi' + C'_2 \sin \xi') + e^{-\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) \quad (5.30)$$

où le premier terme représente l'effet du bord supérieur ($x' = 0$) et le second celui du bord inférieur ($x = 0$). Cette division de w_0 en deux parties fait bien ressortir qu'à chaque bord s'attachent deux conditions aux limites.

On introduit les fonctions

$$\begin{aligned} \gamma_1(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \\ \gamma_2(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \\ \gamma_3(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi = \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \\ \gamma_4(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi = \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ces fonctions sont représentées graphiquement à la figure 5.6 et tabulées à l'annexe 5.13.1 ; elles permettent d'écrire

$$\begin{aligned} w_0 &= C'_1 \gamma_3(\xi') + C'_2 \gamma_4(\xi') + C_3 \gamma_3(\xi) + C_4 \gamma_4(\xi) \\ \frac{dw_0}{dx} &= \frac{\lambda}{a} (C'_1 \gamma_1(\xi') - C'_2 \gamma_2(\xi') - C_3 \gamma_1(\xi) + C_4 \gamma_2(\xi)) \\ \frac{d^2 w_0}{dx^2} &= 2 \frac{\lambda^2}{a^2} (C'_1 \gamma_4(\xi') - C'_2 \gamma_3(\xi') + C_3 \gamma_4(\xi) - C_4 \gamma_3(\xi)) \\ \frac{d^3 w_0}{dx^3} &= 2 \frac{\lambda^3}{a^3} (-C'_1 \gamma_2(\xi') - C'_2 \gamma_1(\xi') + C_3 \gamma_2(\xi) + C_4 \gamma_1(\xi)) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ces relations facilitent le calcul de la partie de N_θ (5.17) ou (5.26), θ_x (5.14), M_x (5.16) (d'où M_θ (5.15)) et V_x (5.27) due à la solution homogène w_0 de (5.23) $w = w_0 + w_1$.

5.8 Coque cylindrique – Effet flexionnel de bord

5.8.1 Effet de bord, longueur limite et cylindre long

Dans (5.23) $w(x) = w_0(x) + w_1(x)$, la solution homogène $w_0(x)$ traduit l'effet des bords (action statique ou condition cinématique), tandis que la solution particulière $w_1(x)$ donne l'effet des charges de surface (p_x et p_z). La solution complète est la superposition de ces deux effets.

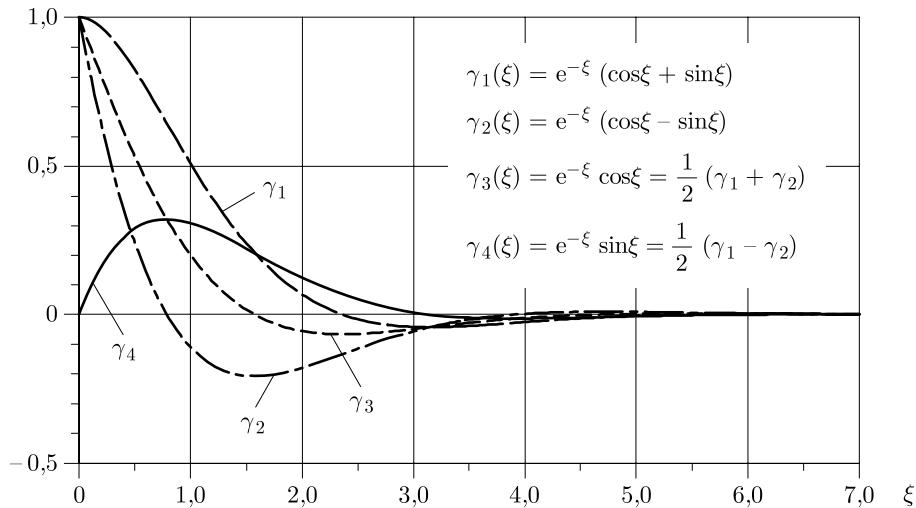


Fig. 5.6 Fonctions $\gamma_1(\xi)$, $\gamma_2(\xi)$, $\gamma_3(\xi)$ et $\gamma_4(\xi)$.

La figure 5.6 montre que les fonctions $\gamma_1(\xi)$ à $\gamma_4(\xi)$ (5.31) décroissent rapidement lorsque x (ou ξ) augmente. Or ces fonctions permettent d'exprimer la solution homogène w_0 et les grandeurs qui en dépendent par dérivation ; ces dernières s'amortissent donc tout aussi rapidement et sont quasi nulles au-delà d'une certaine abscisse.

Ce caractère localisé est connu sous le nom d'**effet flexionnel de bord** ou, simplement, **effet de bord**, et est commun à la plupart des coques de révolution.

En pratique, la solution homogène peut être considérée comme négligeable au-delà d'une certaine **longueur limite** L_{lim} . On vérifie sans peine que les fonctions $\gamma_1(\xi)$ à $\gamma_4(\xi)$ sont amorties à moins de 3 % de leur valeur maximale pour $\xi \cong 4$. Alors, avec (5.24), puis (5.21) et $\nu \cong 0$,

$$L_{\text{lim}} \cong 4 \frac{a}{\lambda} \cong 3\sqrt{at} \quad (5.33)$$

Si, par exemple, $t/a = 1/10, 1/25$ et $1/50$, on obtient $L_{\text{lim}} \cong a, 0,6a$ et $0,4a$, de sorte que l'influence de la solution homogène est pratiquement négligeable au-delà d'une longueur égale au rayon.

En conclusion :

- l'effet flexionnel de bord a un *caractère très localisé* ;
- on qualifie de *long* un cylindre dont la longueur est égale ou supérieure à L_{lim} ; toutefois, si l'effet flexionnel des deux bords du cylindre est non nul, il faut évidemment porter la limite à $2L_{\text{lim}}$ pour ne pas avoir interaction (fig. 5.7).

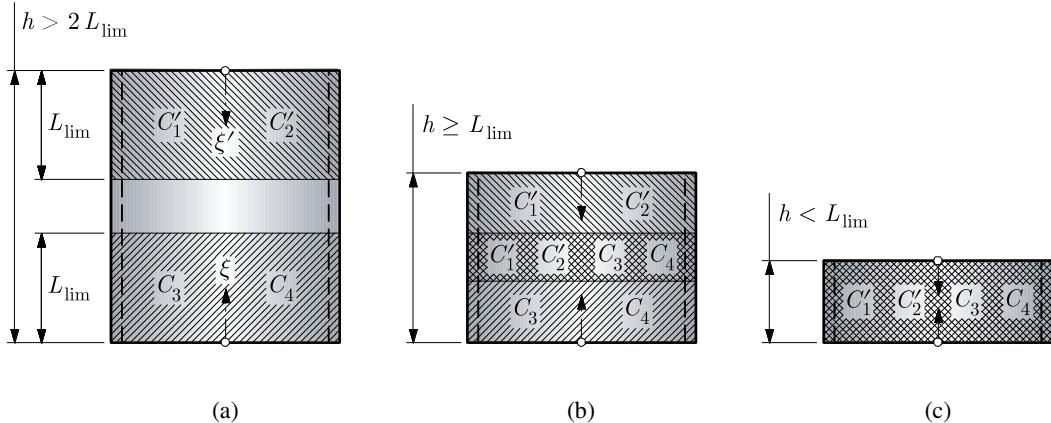


Fig. 5.7 Cylindre : (a) long ; (b) moyen ; (c) court.

Les actions statiques de bord usuelles, dites **forces de bord**, sont le moment \bar{M} (moment axial) et la force \bar{H} (force radiale), tous deux uniformément répartis (fig. 5.8a). Par convention, le sens positif de ces forces est exprimé dans les axes (X, Y, Z) (fig. 4.8) : ces forces s'associent aux déplacements θ_φ et u_X , avec, pour le cylindre, $\theta_\varphi = \theta_x$ et $u_X = -w$. Pratiquement, le moment \bar{M} agit dans le sens trigonométrique et la force \bar{H} vers l'extérieur.

5.8.2 Application – Cylindre semi-infini chargé au bord

On considère un cylindre semi-infini soumis, le long du parallèle $x = 0$, aux seules forces de bord \bar{M} et \bar{H} (fig. 5.8a). Il est évident que $N_x = 0$, $p_z = 0$, $w_1(x) = 0$ et que seule subsiste la solution homogène $w_0(x)$ (5.30).

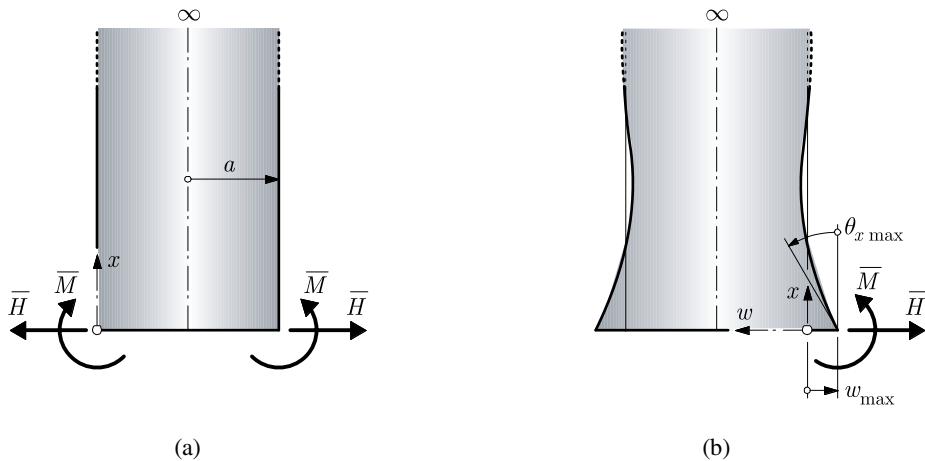


Fig. 5.8 Cylindre semi-infini : (a) forces de bord ; (b) déformée.

Les conditions aux limites sur le bord *supérieur* sont

$$M_x = 0 \quad \text{et} \quad V_x = 0 \quad \text{en } \xi' = 0 \text{ (ou } \xi = \infty)$$

On en déduit

$$C'_1 = C'_2 = 0$$

et il reste

$$w_0(\xi) = C_3\gamma_3(\xi) + C_4\gamma_4(\xi)$$

Les conditions aux limites (statiques) sur le bord chargé sont

$$M_x = \bar{M} \quad \text{et} \quad V_x = \bar{H} \quad \text{en } \xi = 0 \text{ (ou } \xi' = \infty)$$

Avec M_x de (5.16), V_x de (5.27) et $w = w_0$, on trouve, tout calcul fait,

$$C_3 = -\frac{a^3}{2D\lambda^3} \left(\bar{H} + \frac{\lambda}{a} \bar{M} \right) \quad C_4 = \frac{a^2}{2D\lambda^2} \bar{M}$$

On connaît donc l'expression de w_0 et, par conséquent, de ses dérivées, ce qui résout le problème. Avec les fonctions γ_1 à γ_4 , on a

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{a^3}{2D\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{a} \bar{M}\gamma_2 + \bar{H}\gamma_3 \right) \\ \frac{dw_0}{dx} &= \frac{a^2}{2D\lambda^2} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M}\gamma_3 + \bar{H}\gamma_1 \right) \\ \frac{d^2w_0}{dx^2} &= -\frac{a}{D\lambda} \left(\frac{\lambda}{a} \bar{M}\gamma_1 + \bar{H}\gamma_4 \right) \\ \frac{d^3w_0}{dx^3} &= \frac{1}{D} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M}\gamma_4 - \bar{H}\gamma_2 \right) \end{aligned} \tag{5.34}$$

On en déduit M_x par (5.16), $M_\theta = \nu M_x$ par (5.15), V_x par (5.27) et, avec $N_x = 0$, N_θ par (5.26); la distribution des efforts intérieurs est donc connue dans toute la coque.

On termine par le calcul des déplacements maximaux, qui se produisent à la base de la coque ($x = 0$; fig. 5.8b),

$$\begin{aligned} w_{\max} &= w_0|_{\xi=0} = -\frac{a^3}{2D\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{a} \bar{M} + \bar{H} \right) = -\frac{2a\lambda}{Et} \left(\frac{\lambda}{a} \bar{M} + \bar{H} \right) \\ \theta_x \max &= \theta_x|_{\xi=0} = \frac{a^2}{2D\lambda^2} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M} + \bar{H} \right) = \frac{2\lambda^2}{Et} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M} + \bar{H} \right) \end{aligned} \tag{5.35}$$

Exemple 5.1

Une coque cylindrique en acier, pour laquelle $E = 21\,000 \text{ kN/cm}^2$, $\nu = 0,3$, $a = 16 \text{ cm}$, $h = 55 \text{ cm}$ et $t = 1 \text{ cm}$, est soumise à une charge de bord radiale $q = 1 \text{ kN/cm}$ (fig. 5.9).

Avec (5.33) $L_{\lim} = 12 \text{ cm}$, on a une coque longue. Via les relations (5.34) pour w et ses dérivées, (5.26) pour N_{θ} et (5.16) pour M_x , on trouve, avec (5.21) $\lambda = 5,141628$ et $\bar{H} \equiv q$,

$$N_{\theta} = 10,283256 \gamma_3 \text{ [kN/cm]}$$

$$M_x = 3,111855 \gamma_4 \text{ [kN cm/cm]}$$

Les diagrammes des efforts intérieurs N_{θ} et M_x de la figure 5.9 montrent bien le caractère localisé de l'effet flexionnel dû à la charge de bord q .

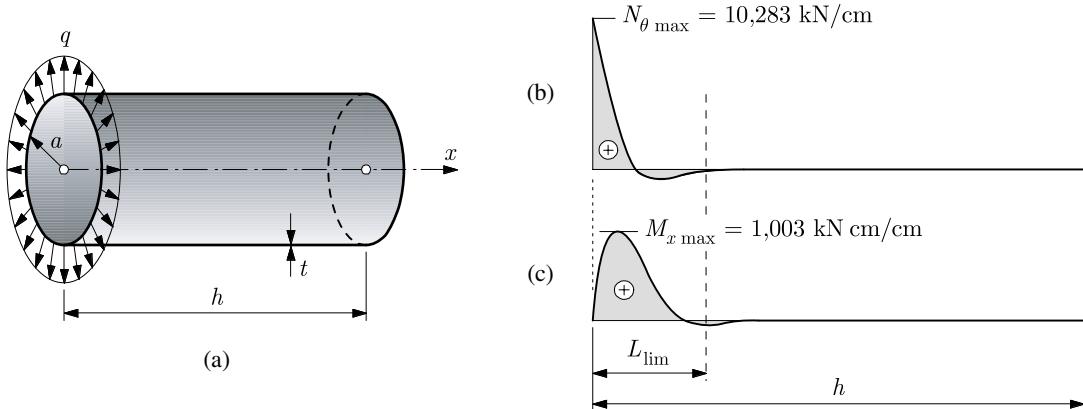


Fig. 5.9 Effet de bord d'une coque cylindrique :
(a) données ; (b) diagramme de N_{θ} ; (c) diagramme de M_x .

5.9 Méthode approchée par superposition

5.9.1 Liaison avec la solution membranaire

Si le second membre p^* de l'équation différentielle (5.20) de la coque cylindrique est un polynôme de degré 3 au plus, alors la *solution particulière* w_1 est de la forme

$$w_1(x) = \frac{a^2}{Et} p^*(x) \quad (5.36)$$

D'autre part, la *solution membranaire* w_m de la coque cylindrique, obtenue au paragraphe 4.7.1, fournit (indice m pour membranaire)

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{w_m}{a} = \frac{1}{Et} (N_{\theta} - \nu N_x)$$

$$N_{\theta} = -ap_z$$

d'où

$$w_m(x) = \frac{a}{Et} (ap_z + \nu N_x) = \frac{a^2}{Et} \left(p_z + \frac{\nu}{a} N_x \right)$$

Pour la même charge p_z , et puisque les N_x des comportements membranaire et flexionnel sont identiques (§ 5.7.1), on a, avec (5.19),

$$w_m(x) = w_1(x) \quad (5.37)$$

Enfin, si le degré du polynôme p^* dans (5.36) est de degré 1 au plus, alors

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0$$

et par suite $M_x(w_1) = V_x(w_1) = 0$. En conclusion :

Dans une coque cylindrique pour laquelle le second membre p^ de l'équation différentielle (5.20) est un polynôme linéaire au plus, la solution flexionnelle particulière w_1 est identique à la solution membranaire w_m .*

5.9.2 Superposition de l'effet flexionnel de bord à la solution membranaire

Si la propriété du paragraphe précédent est satisfaite, la somme

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) \equiv w_0(x) + w_m(x) \quad (5.38)$$

est la *solution exacte* du problème de la coque cylindrique. On peut alors interpréter l'équation (5.38) de la façon suivante :

La solution homogène (effet flexionnel de bord) peut être considérée comme une correction de la solution membranaire destinée à restituer la compatibilité cinématique.

Cette interprétation, déjà mentionnée et décrite au paragraphe 3.2.4 (fig. 3.1), a été étendue par les ingénieurs

- à tous les types de chargement ($p^*(x)$ quelconque);
- à toutes les formes de coques de révolution (grâce à l'approximation de Geckeler ; sect. 5.11).

L'idée de cette interprétation et de cette généralisation est d'effectuer l'analyse de toute coque de révolution en deux étapes :

- rendre la coque isostatique au niveau de ses conditions aux limites cinématiques, pour en permettre une solution par la théorie membranaire (calcul de w_m);
- restituer les conditions cinématiques réelles par les effets flexionnels de bord (calcul de w_0).

Cette *superposition* « *solution membranaire + effet flexionnel de bord* » fournit, le plus souvent, une *excellente approximation*. Dans le cas des coques cylindriques en effet, vu que la zone d'effet de bord reste très localisée (L_{\lim}), la solution membranaire $w_m(x)$ ne s'écarte guère d'une variation linéaire, quel que soit le cas de charge. Pour les coques de méridien arbitraire, il en est de même à condition que certaines proportions géométriques soient respectées (sect. 5.11 ; en particulier, la coque ne doit pas être surbaissée).

Enfin, aucune étude générale n'a été faite, à la connaissance des auteurs, sur la précision de cette méthode, de sorte qu'un contrôle reste souhaitable.

Remarque

On observe que la démarche par superposition proposée correspond à la *méthode des forces*, typique du calcul des structures en barres et poutres. Il en résulte que l'on peut aussi analyser les coques, dans le même esprit, par la *méthode des déplacements* (sect. 6.4).

5.10 Application – Réservoir cylindrique

On désire étudier un réservoir cylindrique sous la seule action du liquide contenu (masse volumique ρ). La paroi, d'épaisseur t constante, est encastrée en base (fig. 5.10).

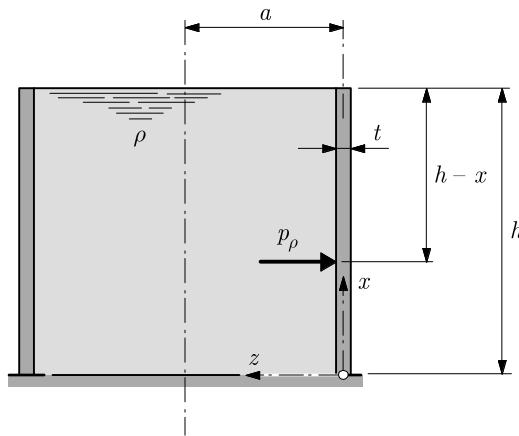


Fig. 5.10 Réservoir cylindrique encastré en base.

La composante radiale de la charge, à la profondeur $h - x$, vaut (§ 4.7.2)

$$p_z = -p_\rho = -\rho g (h - x)$$

On commence par la solution flexionnelle exacte, à partir de l'équation différentielle de la coque cylindrique, puis on applique la méthode approchée par superposition.

5.10.1 Solution par l'équation différentielle

Puisqu'il n'y a pas de charge axiale, $N_x = 0$ et $p^* = p_z$. L'équation différentielle (5.22) s'écrit

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \frac{\lambda^4}{a^4} w = -\frac{\rho g}{D} (h - x)$$

Pour la solution homogène w_0 (5.30), on admet un cylindre long ($h > L_{\lim}$). La solution particulière, aisée à trouver, vaut, avec (5.21),

$$w_1 = -\frac{a^4}{4\lambda^4} \frac{\rho g}{D} (h - x) = -\frac{\rho g a^2}{E t} (h - x) \quad (5.39)$$

Les conditions aux limites sont

- au sommet

$$M_x = 0 \quad \text{et} \quad V_x = 0 \quad \text{en } \xi' = 0$$

d'où $C'_1 = C'_2 = 0$ et

$$w_0(\xi) = C_3\gamma_3(\xi) + C_4\gamma_4(\xi)$$

- à la base

$$w = w_0 + w_1 = 0 \quad \text{et} \quad \theta_x = 0 \quad \text{en } \xi = 0$$

dont on déduit facilement

$$C_3 = \frac{1}{Et} \rho g a^2 h \quad C_4 = \frac{1}{Et} \rho g a^2 \left(h - \frac{a}{\lambda} \right)$$

et w_0 est connu.

Avec (5.23) $w = w_0 + w_1$, on peut maintenant calculer toute grandeur dans la coque ; par exemple, les efforts intérieurs M_x et V_x à l'encastrement valent

$$\begin{aligned} M_x &= 2D \frac{\lambda^2}{a^2} C_4 = a \rho g \frac{2D}{Et} \lambda \left(\lambda \frac{h}{a} - 1 \right) \\ V_x &= -2D \frac{\lambda^3}{a^3} (C_3 + C_4) = -\rho g \frac{2D}{Et} \lambda^2 \left(2\lambda \frac{h}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Remarque

La solution particulière w_1 (5.39) est identique à la solution membranaire w_m – déjà obtenue en (4.30) – puisque $p^* \equiv p_z$ est linéaire.

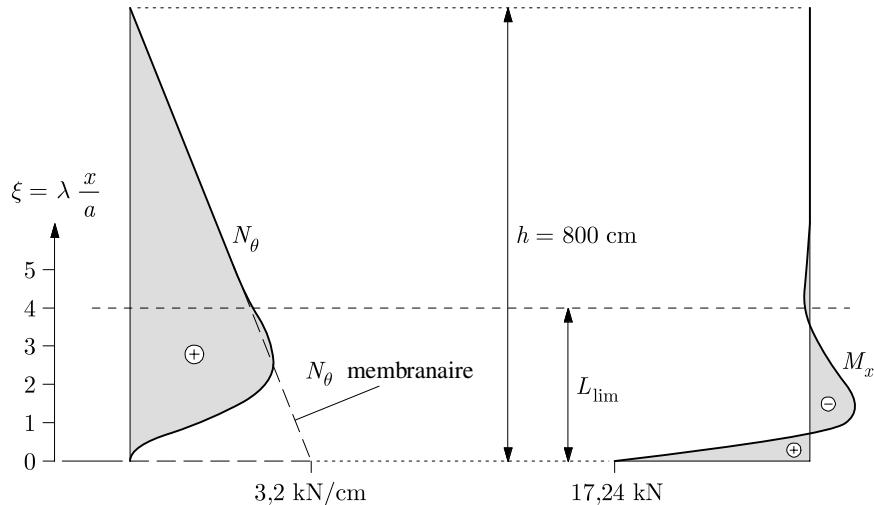


Fig. 5.11 Diagrammes de N_θ et M_x dans la paroi du réservoir cylindrique.

Exemple 5.2

Pour un réservoir en béton de mêmes données numériques qu'à l'exemple 4.1 du paragraphe 4.7.2, à savoir $a = 400$ cm, $h = 800$ cm, $t = 20$ cm, $E = 2100$ kN/cm 2 , $\nu = 0,2$ et $\rho g = 10^{-5}$ kN/cm 3 (eau), la figure 5.11 montre les diagrammes de N_θ et M_x . Puisque $N_x = 0$, le diagramme N_θ est aussi, par (5.26), celui du déplacement radial w à un facteur près.

5.10.2 Solution par superposition

Pour entreprendre la résolution du réservoir cylindrique, en théorie flexionnelle, par *superposition* (§ 5.9.2), il faut rendre la coque isostatique au niveau des appuis et tout calculer sur cette référence.

L'étude membranaire montre qu'il apparaît des discontinuités à la base, où le déplacement radial w et la rotation θ_x devraient être nuls (déformée membranaire du réservoir, fig. 4.13b) ; la solution membranaire seule ne peut effectivement pas conduire à des résultats corrects.

Par contre, vu que $p^* = p_z$ est linéaire,

- la solution membranaire (4.30) est bien identique à la solution particulière (5.39) ;
- on doit trouver la solution exacte en ajoutant, à la solution membranaire, la solution *effet flexionnel de bord* choisie de manière à annuler les discontinuités propres à la solution membranaire (fig. 5.12).

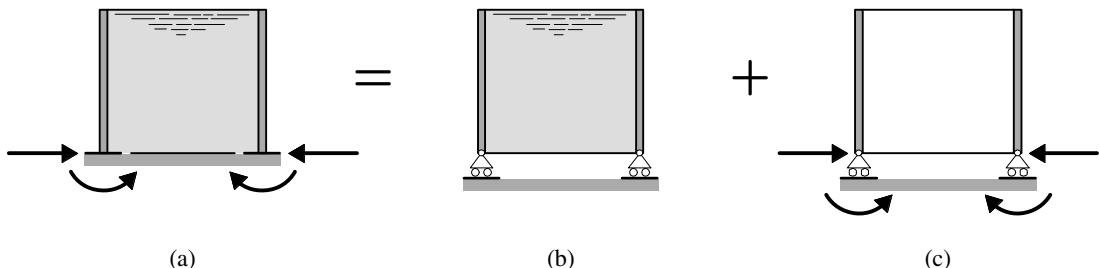


Fig. 5.12 Réservoir cylindrique pour l'analyse flexionnelle par superposition :
 (a) coque réelle ; (b) coque isostatique pour la solution membranaire ;
 (c) coque isostatique pour la solution effet de bord.

Pour restaurer la compatibilité cinématique à la base ($w = 0$ et $\theta_x = 0$), on introduit les forces de bord X_1 et X_2 (fig. 5.13) et on applique la méthode des forces.

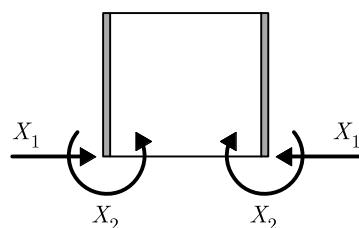


Fig. 5.13 Hyperstatiques de bord pour la méthode des forces.

Il faut établir les deux équations

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{10} = 0 \quad (\text{translation})$$

$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + f_{20} = 0 \quad (\text{rotation})$$

A partir de (5.35) pour les coefficients de flexibilité f_{11} , f_{12} , f_{21} et f_{22} , et (4.30) et (4.31) pour les termes indépendants f_{10} et f_{20} , on a

$$f_{11} = \frac{a^3}{2D\lambda^3} \quad f_{12} = \frac{a^2}{2D\lambda^2} \quad f_{10} = -\frac{a^2\rho gh}{Et}$$

$$f_{21} = f_{12} \quad f_{22} = \frac{a}{D\lambda} \quad f_{20} = -\frac{a^2\rho g}{Et}$$

où les signes sont maintenant dictés par la méthode des forces, c'est-à-dire par le choix du sens d'action de X_1 et X_2 . La résolution donne

$$X_1 = \rho g \frac{2D}{Et} \lambda^2 \left(2\lambda \frac{h}{a} - 1 \right) \quad X_2 = -a\rho g \frac{2D}{Et} \lambda \left(\lambda \frac{h}{a} - 1 \right) \quad (5.41)$$

ce qui est la solution exacte (comparer avec les valeurs de V_x et M_x (5.40) de la solution flexionnelle).

Exemple 5.3

En reprenant les valeurs numériques précédentes, la solution membranaire (§ 4.7.2) fournit

$$N_{\theta,m \text{ max}} = 3,20 \text{ kN/cm} \quad w_{m \text{ max}} = -0,0305 \text{ cm} \quad \theta_{x,m} = 0,381 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

et, avec

$$D = 1,4583 \cdot 10^6 \text{ kNm} \quad \lambda^4 = 1152$$

les réactions de bord (5.41) valent

$$X_1 = 0,5257 \text{ kN/cm} \quad X_2 = -17,238 \text{ kNm/cm}$$

A l'aide de (5.34), en prenant garde aux signes et en posant $w_0 = w_f$ (indice f pour effet flexionnel de bord), on a

$$w_f = \frac{a^3}{2D\lambda^3} \left(\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_2 + X_1 \gamma_3 \right) \quad \frac{d^2 w_f}{dx^2} = \frac{a}{D\lambda} \left(\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_1 + X_1 \gamma_4 \right)$$

et on peut calculer l'effet de bord, par exemple

$$N_{\theta,f} = -\frac{Et}{a} w_f = -11,6518 \left(\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_2 + X_1 \gamma_3 \right)$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w_f}{dx^2} = -68,6589 \left(\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_1 + X_1 \gamma_4 \right)$$

dont la table ci-après donne quelques valeurs.

$\frac{\lambda}{a} x$	x [cm]	$\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_2 + X_1 \gamma_3$	$N_{\theta,f}$ [kN/cm]	$\frac{\lambda}{a} X_2 \gamma_1 + X_1 \gamma_4$	M_x [kNm/cm]
0	0	0,2746	-3,20	-0,2511	17,24
1	68,66	0,1323	-1,54	0,0351	-2,41
2	137,32	0,0155	-0,18	0,0479	-3,29
3	205,98	-0,0118	0,14	0,0144	-0,99

La figure 5.11 montre les diagrammes de N_{θ} (superposition solution membranaire + effet flexionnel de bord : $N_{\theta} = N_{\theta,m} + N_{\theta,f}$) et de M_x .

5.11 Coque sphérique – Effet flexionnel de bord

On peut établir, pour une calotte sphérique (coque sphérique limitée à un parallèle) soumise à des forces de bord, des expressions semblables à celles obtenues pour le cylindre. On développe d'abord deux équations différentielles résolvant exactement le problème, puis on en tire une solution approchée utilisable en pratique.

5.11.1 Solution homogène de la coque sphérique

Soit a le rayon de la sphère, $t = \text{cste}$ l'épaisseur et, pour une coque sans charges de surface, $p_\varphi = p_z = 0$. On introduit ces quelques simplifications dans les douze équations (5.4) à (5.8), dont on va tirer deux équations ne contenant plus que V_φ et θ_φ comme inconnues.

On résout facilement (5.4) par rapport à N_φ et N_θ ; on trouve

$$N_\varphi = -V_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \quad N_\theta = -\frac{dV_\varphi}{d\varphi} \quad (5.42)$$

La première équation exprime l'équilibre axial de toute calotte sphérique coupée au niveau du parallèle $\varphi = \text{cste}$ (fig. 5.14).

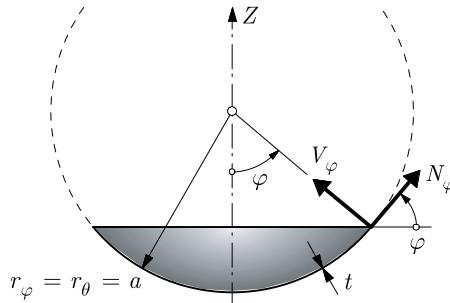


Fig. 5.14 Calotte sphérique en équilibre de translation selon Z (M_φ non représenté).

On vérifie ensuite que

$$\theta_\varphi = (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\theta) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d\varepsilon_\theta}{d\varphi}$$

à l'aide de (5.5) et (5.6), ce qui élimine u et w ; introduisant (5.42) dans N_φ et N_θ de (5.8) résolus par rapport à ε_φ et ε_θ , on en déduit

$$\frac{d^2V_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dV_\varphi}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \nu) V_\varphi = Et\theta_\varphi \quad (5.43)$$

Enfin, substituant (5.7) dans M_φ et M_θ de (5.8), puis ces dernières valeurs dans la troisième équation (5.4), on trouve

$$\frac{d^2\theta_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{d\theta_\varphi}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \nu)\theta_\varphi = -\frac{a^2}{D} V_\varphi \quad (5.44)$$

Ces deux équations sont le point de départ des études tant rigoureuses qu'approchées des effets de bord sur les calottes sphériques.

5.11.2 Approximation de Geckeler

Geckeler (1926) a constaté que, pour une calotte sphérique mince (a/t grand) et d'angle d'ouverture grand (2α grand), soumise à des *forces de bord* \bar{M} et \bar{H} (fig. 5.15), la solution exacte des effets flexionnels de bord s'amortissait très rapidement, à l'image des résultats (5.34) obtenus pour la coque cylindrique.

Dans (5.34) en effet, chaque nouvelle dérivée est « λ fois » plus grande que la précédente ; or le paramètre (5.21) λ

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{a}{t}}$$

a une valeur élevée puisque a/t est grand (§ 2.4.3, (2.8) $a/t > 10$). Par suite, approximativement, une fonction est négligeable devant sa dérivée, une dérivée devant sa dérivée seconde, etc. Cette constatation est la même pour les coques sphériques ; l'appliquant à (5.43) et (5.44), on obtient

$$\frac{d^2V_\varphi}{d\varphi^2} \cong Et\theta_\varphi \quad (5.45)$$

$$\frac{d^2\theta_\varphi}{d\varphi^2} \cong -\frac{a^2}{D} V_\varphi \quad (5.46)$$

ce qui nécessite de supposer, en plus, que φ est grand, et donc $\operatorname{ctg} \varphi$ petit, pour que les produits $(dV_\varphi/d\varphi) \operatorname{ctg} \varphi$, $\theta_\varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi$, etc., soient négligeables. (L'effet de bord a lieu pour des valeurs de φ voisines de α .)

L'approximation de Geckeler est donc valable sous la double condition que a/t et α soient suffisamment grands ; l'ordre de grandeur, et la précision correspondante, de ces deux quantités sont donnés plus loin (§ 5.11.5).

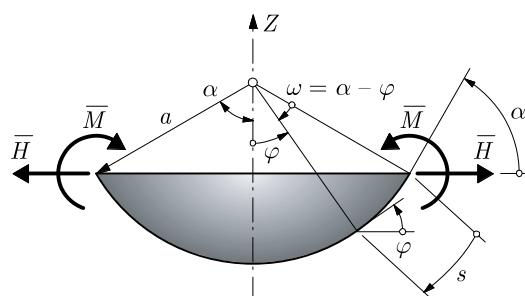


Fig. 5.15 Forces de bord sur une calotte sphérique.

Insérant (5.45), dérivé deux fois, dans (5.46), on obtient l'équation

$$\frac{d^4 V_\varphi}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 V_\varphi = 0 \quad (5.47)$$

qui est identique à (5.22) sans second membre ($p^* = 0$). La solution est donc

$$V_\varphi = e^{\lambda\varphi} (C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi) + e^{-\lambda\varphi} (C_3 \cos \lambda\varphi + C_4 \sin \lambda\varphi) \quad (5.48)$$

5.11.3 Forces et effet de bord (approximation de Geckeler)

Une calotte sphérique d'ouverture 2α est soumise aux forces de bord \bar{M} et \bar{H} uniformément réparties sur le parallèle de bord (fig. 5.15; \bar{M} positif comme θ_φ et \bar{H} positif comme u_X). Puisque tout s'amortit lorsque φ diminue (à partir de $\varphi = \alpha$), comme dans les cylindres, il faut poser, dans (5.48), $C_3 = C_4 = 0$ et il reste

$$V_\varphi = e^{\lambda\varphi} (C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi) \quad (5.49)$$

Les conditions statiques aux limites

$$M_\varphi = -\bar{M} \quad \text{et} \quad V_\varphi = -\bar{H} \sin \alpha \quad \text{en } \varphi = \alpha$$

permettent de trouver les constantes C_1 et C_2 , puis, tout calcul fait,

$$V_\varphi = -2\frac{\lambda}{a} \bar{M} e^{-\lambda(\alpha-\varphi)} \sin \lambda(\alpha - \varphi) - \bar{H} \sin \alpha e^{-\lambda(\alpha-\varphi)} (\cos \lambda(\alpha - \varphi) - \sin \lambda(\alpha - \varphi))$$

Cette expression est très semblable à son homologue (5.27) obtenue pour le cylindre, quand on injecte dans celle-ci la dernière équation (5.34); aussi introduit-on la nouvelle variable

$$\xi = \lambda \frac{s}{a} = \lambda(\alpha - \varphi) = \lambda\omega \quad (5.50)$$

où s et ω sont l'abscisse curviligne le long du méridien et l'angle interceptant s , comptés à partir du bord chargé dans le sens opposé à φ (fig. 5.15). On peut ainsi utiliser les fonctions γ_1 à γ_4 (5.31) et écrire

$$V_\varphi = -2\frac{\lambda}{a} \bar{M} \gamma_4 - \bar{H} \gamma_2 \sin \alpha$$

Connaissant V_φ , on trouve N_φ et N_θ par (5.42), puis θ_φ par (5.45); négligeant θ_φ devant sa dérivée (approximation de Geckeler) dans l'expression (5.7) des courbures (d'où $c_\theta \cong 0$), les moments (5.8) s'écrivent

$$M_\varphi \cong D\psi_\varphi \quad M_\theta \cong \nu M_\varphi$$

où ψ_φ se calcule par (5.7) $\psi_\varphi = -c_\varphi = -(1/a)(d\theta_\varphi/d\varphi)$ à partir de θ_φ .

Enfin, il faut connaître le déplacement radial u_X ; on a, par (4.18), (4.13) et (5.42) successivement,

$$u_X = \varepsilon_\theta a \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi}{Et} (N_\theta - \nu N_\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{Et} \left(\nu V_\varphi \operatorname{ctg} \varphi - \frac{dV_\varphi}{d\varphi} \right)$$

et finalement, avec l'approximation de Geckeler,

$$u_X \cong -\frac{a \sin \varphi}{Et} \frac{dV_\varphi}{d\varphi} = \frac{a \sin \varphi}{Et} N_\theta$$

Tenant compte de tous ces développements et introduisant la variable ξ (5.50), on résume les résultats utiles comme suit (la deuxième colonne donnant N_φ , u_X et M_θ s'obtenant directement de la première colonne, une fois V_φ , N_θ et M_θ connus)

$$\begin{aligned} V_\varphi &= -2\frac{\lambda}{a} \bar{M} \gamma_4 - \bar{H} \gamma_2 \sin \alpha & N_\varphi &= -V_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \\ N_\theta &= 2\lambda \left(-\frac{\lambda}{a} \bar{M} \gamma_2 + \bar{H} \gamma_3 \sin \alpha \right) & u_X &= \frac{a \sin \varphi}{Et} N_\theta \\ M_\varphi &= -\bar{M} \gamma_1 + \frac{a}{\lambda} \bar{H} \gamma_4 \sin \alpha & M_\theta &= \nu M_\varphi \\ \theta_\varphi &= \frac{2\lambda^2}{Et} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M} \gamma_3 - \bar{H} \gamma_1 \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

avec $\varphi = \alpha - \omega = \alpha - s/a$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ selon l'annexe 5.13.1.

Les déplacements le long du parallèle où s'exercent les forces de bord, en $\varphi = \alpha$ (ou $\omega = 0$ ou $s = 0$), sont

$$\begin{aligned} u_X &= \frac{2a}{Et} \lambda \sin \alpha \left(-\frac{\lambda}{a} \bar{M} + \bar{H} \sin \alpha \right) \\ \theta_\varphi &= \frac{2\lambda^2}{Et} \left(2\frac{\lambda}{a} \bar{M} - \bar{H} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

L'une des relations précédentes, à savoir $M_\theta = \nu M_\varphi$, présente toutefois un défaut essentiel. Sous \bar{H} , en $\varphi = \alpha$, on a certes $M_\varphi = 0$, mais M_θ n'est pas nul, contrairement à ce qui ressort de la relation simplifiée $M_\theta = \nu M_\varphi$. Pour pallier ce défaut, il suffit de calculer M_θ par la relation constitutive complète

$$M_\theta = D(\psi_\theta + \nu \psi_\varphi) = D\psi_\theta + \nu D\psi_\varphi$$

sans négliger la courbure ψ_θ . On tire $D\psi_\varphi$ de la relation constitutive (5.8) $M_\varphi = D(\psi_\varphi + \nu \psi_\theta)$ d'une part, et la courbure ψ_θ de (5.7) d'autre part, soit

$$D\psi_\varphi = M_\varphi - \nu D\psi_\theta \quad \psi_\theta = -\frac{1}{a} \theta_\varphi \operatorname{ctg} \varphi$$

Avec θ_φ (5.51), on obtient

$$\begin{aligned} M_\theta &= -\frac{D(1 - \nu^2)}{a} \theta_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + \nu M_\varphi \\ &= \frac{a}{2\lambda^2} (1 - \nu^2) \operatorname{ctg} \varphi \left(-2\frac{\lambda}{a} \bar{M} \gamma_3 + \bar{H} \gamma_1 \sin \alpha \right) + \nu M_\varphi \end{aligned} \quad (5.53)$$

5.11.4 Utilisation et interprétation (approximation de Geckeler)

Lorsque a/t et α sont grands, l'effet de bord ne s'étend guère au-delà des limites approximatives (fig. 5.16)

$$s_{\lim} \cong 2\sqrt{at} \cong 0,4a \quad \omega_{\lim} \cong 20^\circ \cong 0,4 \text{ rad} \quad (5.54)$$

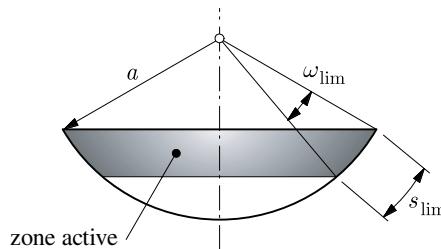


Fig. 5.16 Etendue de l'effet de bord.

Par conséquent, seule la zone correspondante travaille (fig. 5.16) et le reste de la calotte ne joue pas de rôle : *hors de la zone d'effet de bord, la forme ou même la présence de la coque est sans conséquence*. Il en résulte que :

- on peut obtenir la solution complète approchée d'une coque sphérique en *superposant* les solutions membranaire et effet flexionnel de bord (comme pour les cylindres) ;
- on peut déterminer l'effet de bord de *toute coque* en y inscrivant une *sphère tangente* et, par suite, aussi *procéder par superposition pour une coque de révolution arbitraire* (fig. 5.17).

Cette dernière propriété donne toute sa valeur à l'approximation de Geckeler, car on est maintenant en mesure de calculer approximativement une coque de révolution de méridien quelconque.

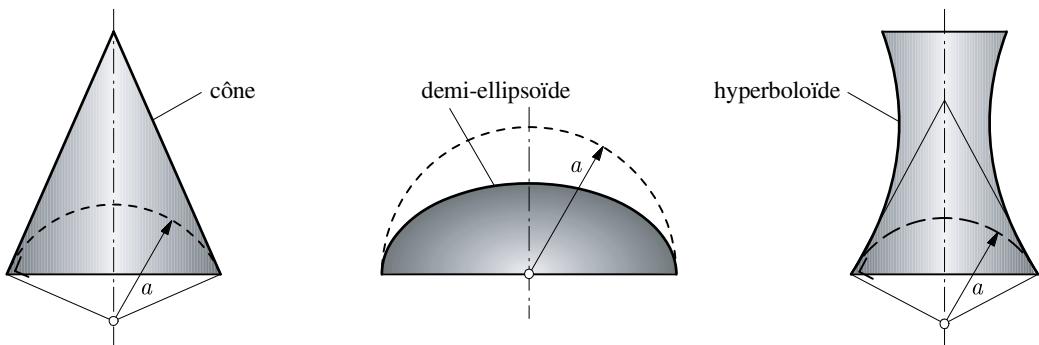


Fig. 5.17 Sphères tangentes de remplacement pour calculer l'effet de bord.

Remarque

Dans le cas d'un hémisphère ($\alpha = \pi/2$), on constate que les formules (5.51) et (5.52) coïncident avec celles du cylindre (§ 5.8.2) : dans ce cas particulier, l'approximation de Geckeler remplace la demi-sphère par le cylindre circonscrit (interprétation physique).

5.11.5 Précision (approximation de Geckeler)

La précision de la méthode de Geckeler a été testée sur une calotte sphérique pour laquelle on a fait varier le rapport a/t et l'angle α dans les limites $10 \leq a/t \leq 70$ et $20^\circ \leq \alpha \leq 50^\circ$. Le rayon a , ainsi que les propriétés mécaniques E et ν du matériau, constants, valent $a = 9,7453125$, $E = 2,1 \cdot 10^7$ et $\nu = 0,2$ (unités cohérentes).

Les résultats obtenus sous les forces de bord \bar{M} et \bar{H} sont comparés à ceux provenant d'un calcul par éléments finis (élément tronconique de Love à deux nœuds). Le nombre des éléments varie de 160 ($\alpha = 20^\circ$) à 400 ($\alpha = 50^\circ$). Les résultats du calcul numérique sont considérés comme précis et pris comme référence.

L'erreur e sur l'intensité X d'une grandeur quelconque est calculée par la relation

$$e = 100 \frac{X_G - X_{\text{EF}}}{X_{\text{EF}}} \quad [\%]$$

où X_G est obtenue par Geckeler et X_{EF} résulte du calcul aux éléments finis. Si $e > 0$, $X_G > X_{\text{EF}}$ et la méthode de Geckeler surestime l'intensité de la grandeur calculée.

Les quinze grandeurs étudiées sont les suivantes (fig. 5.18) :

- sous \bar{M} : $u_X(\alpha)$, $\theta_\varphi(\alpha)$, $N_\varphi \text{ max}$, $N_\theta(\alpha)$, $N_\theta \text{ max}$, $M_\theta(\alpha)$, $V_\varphi \text{ min}$;
- sous \bar{H} : $u_X(\alpha)$, $\theta_\varphi(\alpha)$, $N_\varphi \text{ min}$, $N_\theta(\alpha)$, $M_\varphi \text{ max}$, $M_\theta(\alpha)$, $M_\theta \text{ max}$, $V_\varphi \text{ max}$.

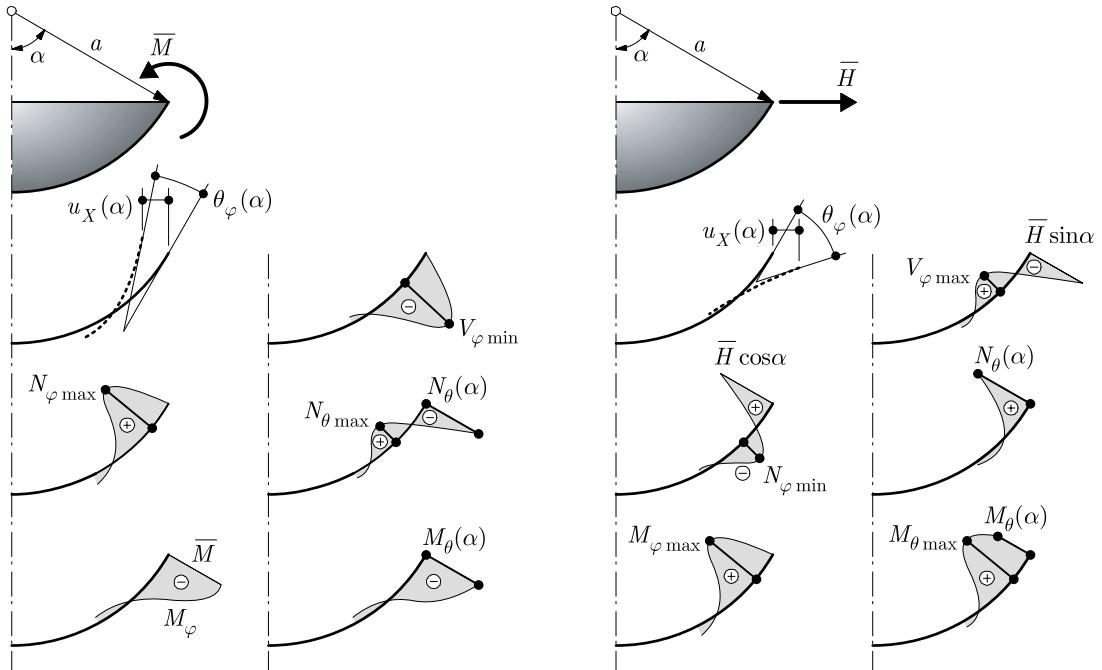


Fig. 5.18 Déplacements et efforts intérieurs étudiés quant à leur précision.

Les relations issues de l'approximation de Geckeler montrent que les grandeurs suivantes sont proportionnelles l'une à l'autre :

$$V_\varphi \quad \text{et} \quad N_\varphi \quad u_X^{\bar{M}}(\alpha) \quad \text{et} \quad N_\theta^{\bar{M}}(\alpha) \quad \theta_\varphi^{\bar{H}}(\alpha) \quad \text{et} \quad M_\theta^{\bar{H}}(\alpha)$$

Elles ont donc la même erreur. De plus, on a l'égalité $u_X^{\bar{M}}(\alpha) = \theta_\varphi^{\bar{H}}(\alpha)$ (théorème de réciprocité de Betti). On en conclut qu'on peut restreindre l'analyse de l'erreur à dix grandeurs.

L'erreur est présentée sous forme de courbes de niveau, cotées en pour cent, dans des axes $(\alpha, a/t)$. L'angle α est exprimé en degrés. La figure 5.19 donne l'erreur sur les déplacements – ainsi que sur $N_\theta^{\bar{M}}(\alpha)$ et $M_\theta^{\bar{H}}(\alpha)$ – et les figures 5.20 et 5.21 celle sur les efforts intérieurs dus, respectivement, à \bar{M} et \bar{H} .

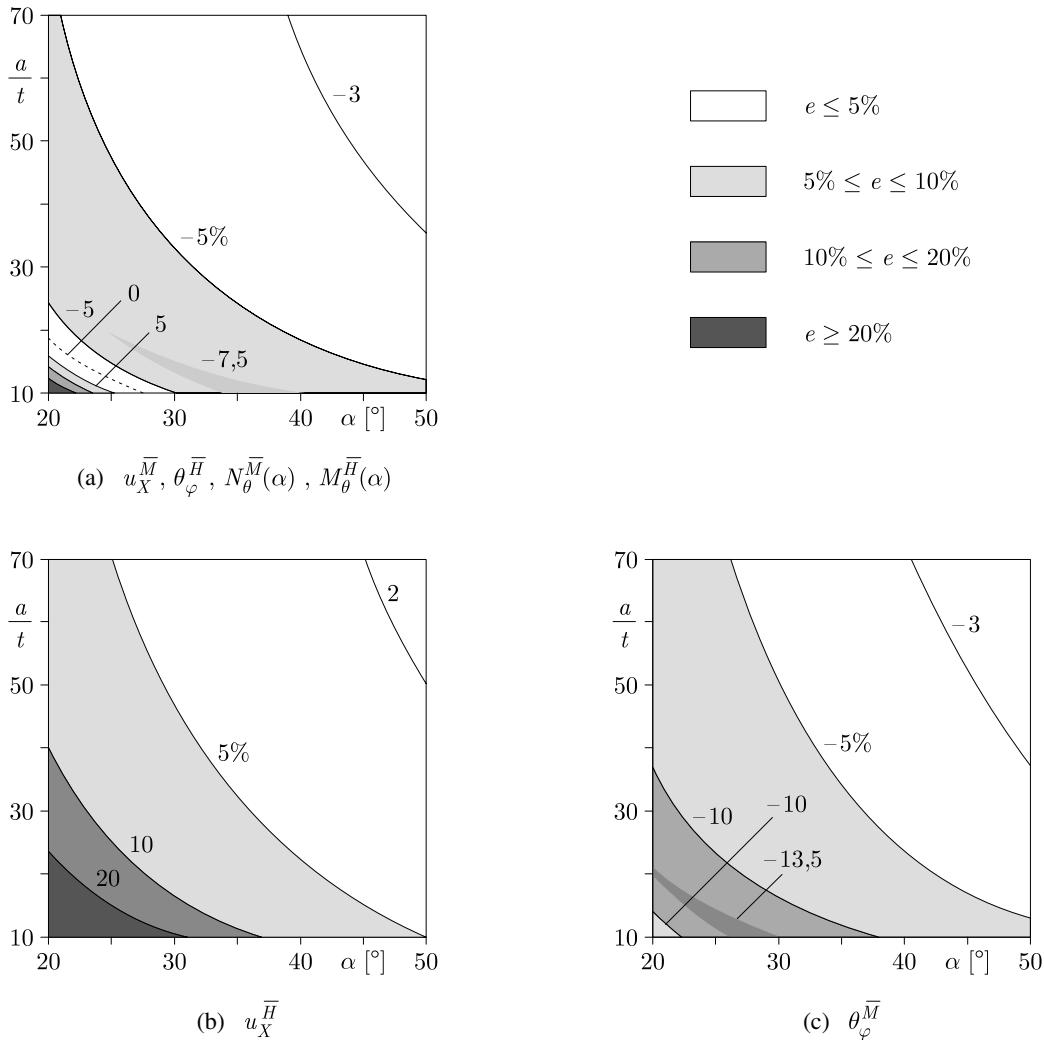


Fig. 5.19 Erreur sur les déplacements.

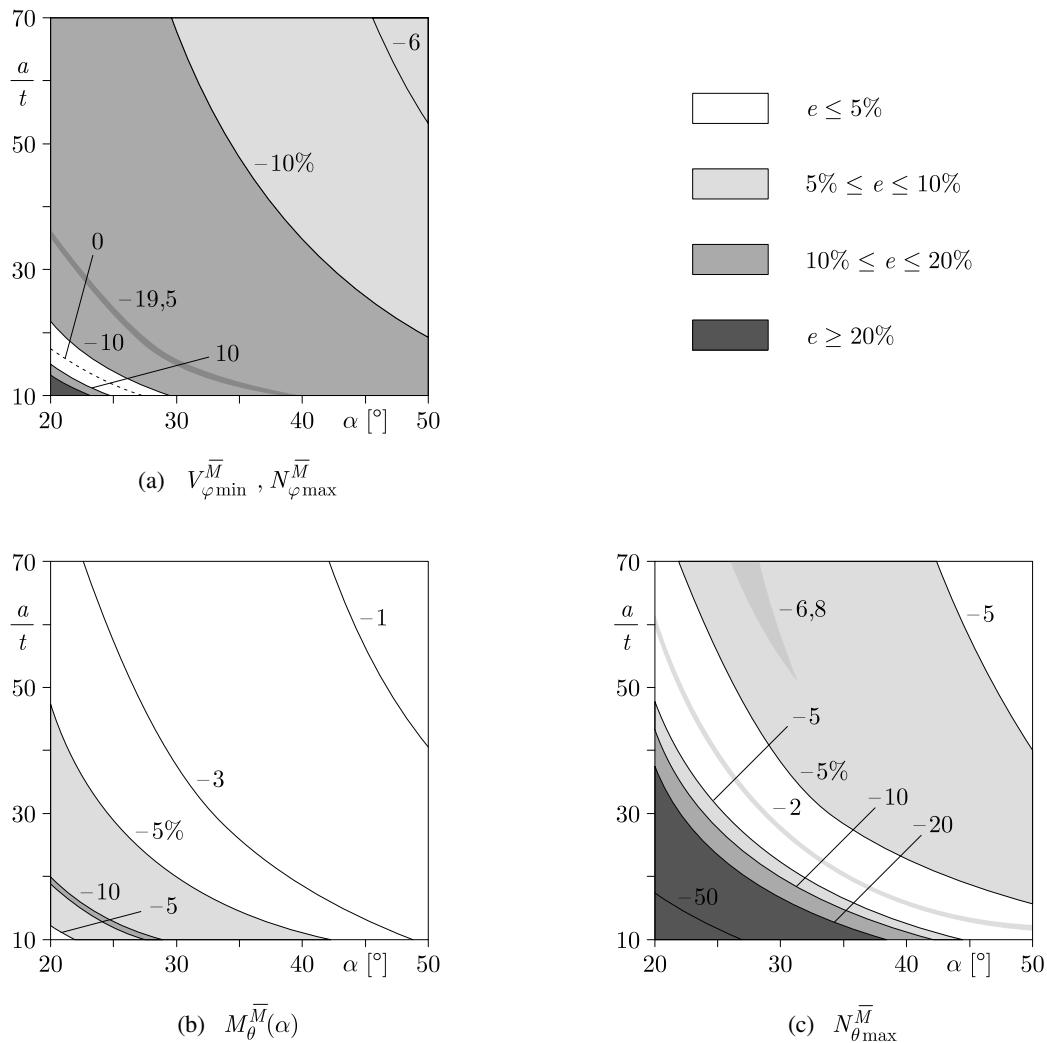


Fig. 5.20 Erreur sur les efforts intérieurs dus à \bar{M} .

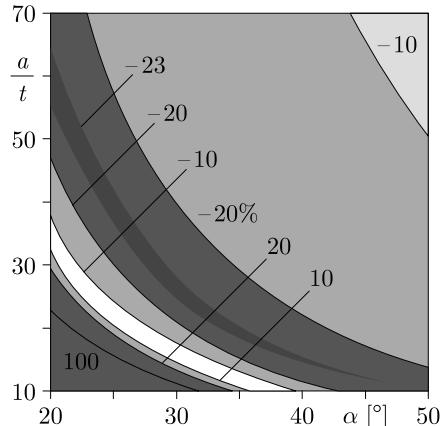
On peut tirer, des figures 5.19 à 5.21, les conclusions générales suivantes, quant à la précision de l'approximation de Geckeler :

- seuls le déplacement $u_X^{\bar{H}}$ et l'effort normal $N_{\theta}^{\bar{H}}(\alpha)$ sont surestimés ; les autres grandeurs sont – essentiellement – sous-estimées ;
- l'effort tranchant V_{φ} et l'effort normal N_{φ} sont nettement moins précis (près de quatre fois) que les autres grandeurs ;
- la précision s'améliore quand α ou a/t augmentent, comme il se doit ;

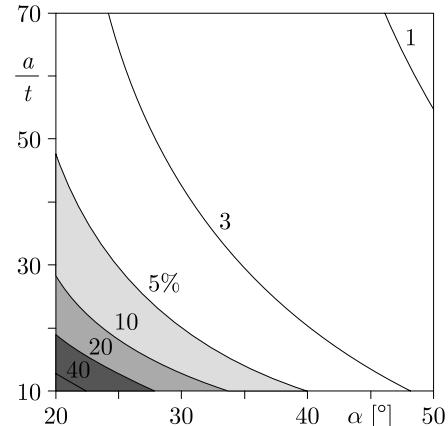
- pour une estimation rapide (α en degrés ; $a/t \geq 10$; $\alpha \geq 20^\circ$)

$$\frac{a}{t} + 2\alpha \geq 100 \implies e \lesssim 5\%$$

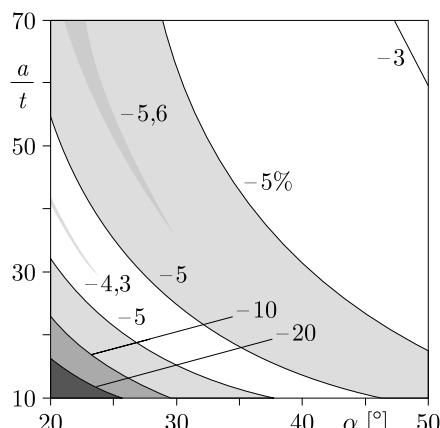
sauf pour V_φ et N_φ , où $e \lesssim 20\%$.



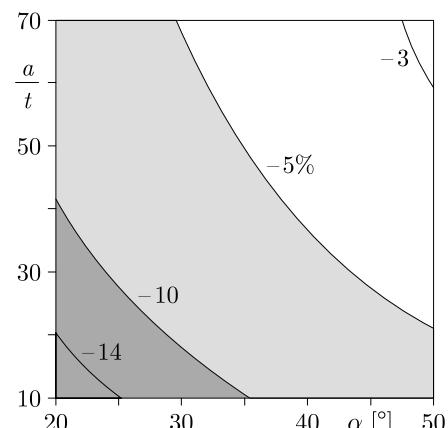
(a) $V_{\varphi \max}^{\bar{H}}, N_{\varphi \min}^{\bar{H}}$



(b) $N_{\theta}^{\bar{H}}(\alpha)$



(c) $M_{\varphi \max}^{\bar{H}}$



(d) $M_{\theta \max}^{\bar{H}}$



$e \leq 5\%$



$5\% \leq e \leq 10\%$



$10\% \leq e \leq 20\%$



$e \geq 20\%$

Fig. 5.21 Erreur sur les efforts intérieurs dus à \bar{H} .

La valeur de l'erreur e varie légèrement, de quelques pour cent, si on étudie un autre cas (par exemple en modifiant la valeur du coefficient de Poisson ν), mais l'allure de la variation de e reste identique. Dès lors, *l'approximation de Geckeler évalue de manière très satisfaisante les effets flexionnels de bord des coques de révolution de méridien arbitraire*. On l'utilisera dans les applications pratiques (prédimensionnement) et dans le contrôle des calculs par éléments finis.

5.12 Exercices

5.12.1 Déduire, des équations générales du chapitre 2, les équations d'équilibre (5.4), les équations cinématiques (5.5) à (5.7), et les conditions aux limites (5.10) et (5.11).

5.12.2 Une coque cylindrique de révolution, de rayon a et d'épaisseur t , est soumise à une charge radiale q uniformément distribuée le long d'un parallèle (fig. Ex. 5.12.2). Cette coque peut être considérée comme très longue de part et d'autre de la charge.

- 1) Etablir les expressions du déplacement radial w et de ses dérivées dw/dx , d^2w/dx^2 et d^3w/dx^3 .
- 2) Ecrire les équations du moment de flexion M_x et de l'effort tranchant V_x .
- 3) Dessiner les allures de la déformée w et des diagrammes de M_x et V_x le long d'une génératrice ; calculer les valeurs de w_{\max} , M_{\max} et V_{\max} .

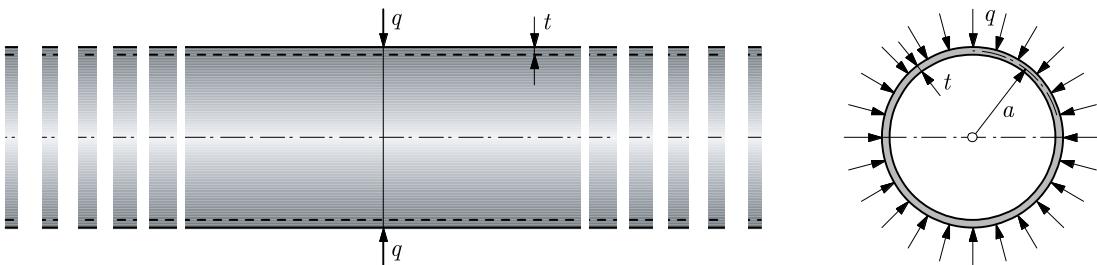


Fig. Ex. 5.12.2

5.12.3 Une tour de réfrigération hyperbolique (hyperboloïde de révolution) en béton armé est articulée à sa base et est soumise à une élévation uniforme de température $T = 50^\circ \text{C}$ (fig. Ex. 5.12.3). Les propriétés mécaniques utiles du béton armé (supposé élastique, linéaire, homogène et isotrope) sont $E = 2200 \text{ kN/cm}^2$, $\nu = 0,2$ et $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{ } ^\circ\text{C}$.

- 1) Calculer le moment de flexion maximal $M_{\varphi \text{ max}}$ et l'effort normal maximal $N_{\theta \text{ max}}$.
 - 2) Dessiner les diagrammes des efforts M_{φ} et N_{θ} .
- Note : le calcul par éléments finis fournit $|M_{\varphi \text{ max}}| = 28,82 \text{ kNm/cm}$ à $Z = 1,50 \text{ m}$ de la base.

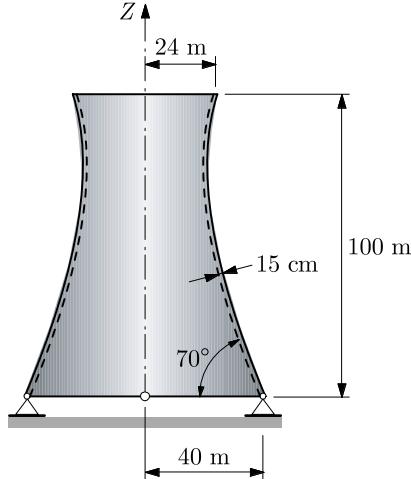


Fig. Ex. 5.12.3

- 5.12.4** Une coque conique d'ouverture $\pi/2$, d'apothème c , d'épaisseur t , de matériau élastique linéaire caractérisé par E et ν , articulée à sa base, supporte une charge concentrée Q en son sommet (fig. Ex. 5.12.4). Tenir compte des effets flexionnels locaux pour calculer la répartition des efforts intérieurs dans la coque (littéral). Rechercher l'intensité maximale de chacun de ces efforts, et indiquer où elle se situe. Pour le cas du moment M_{θ} , prendre $c/t = 25$ et $\nu = 0,25$; comparer $M_{\theta \text{ max}}$ à $M_{\varphi \text{ max}}$.

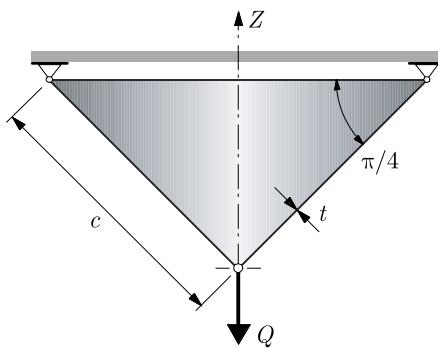


Fig. Ex. 5.12.4

5.13 Annexes

5.13.1 Tableau des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4

Le tableau 5.22 donne la valeur des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 utiles au calcul de l'effet flexionnel de bord des coques de révolution cylindriques et sphériques, en fonction du paramètre ξ :

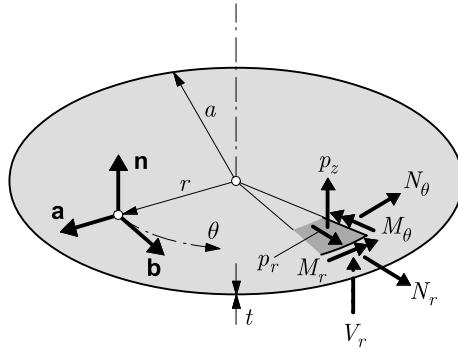
- cylindre $\xi = \lambda x/a$ (5.24) ;
- sphère $\xi = \lambda s/a = \lambda(\alpha - \varphi) = \lambda\omega$ (5.50).

Tableau 5.22 Tabulation des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 .

ξ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	ξ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
0	1,0000	1,0000	1,0000	0	3,5	-0,0389	-0,0177	-0,0283	-0,0106
0,1	0,9907	0,8100	0,9003	0,0903	3,6	-0,0366	-0,0124	-0,0245	-0,0121
0,2	0,9651	0,6398	0,8024	0,1627	3,7	-0,0341	-0,0079	-0,0210	-0,0131
0,3	0,9267	0,4888	0,7077	0,2189	3,8	-0,0314	-0,0040	-0,0177	-0,0137
0,4	0,8784	0,3564	0,6174	0,2610	3,9	-0,0286	-0,0008	-0,0147	-0,0140
0,5	0,8231	0,2415	0,5323	0,2908	4,0	-0,0258	0,0019	-0,0120	-0,0139
0,6	0,7628	0,1431	0,4530	0,3099	4,1	-0,0231	0,0040	-0,0095	-0,0136
0,7	0,6997	0,0599	0,3798	0,3199	4,2	-0,0204	0,0057	-0,0074	-0,0131
0,8	0,6354	-0,0093	0,3131	0,3223	4,3	-0,0179	0,0070	-0,0054	-0,0125
0,9	0,5712	-0,0657	0,2527	0,3185	4,4	-0,0155	0,0079	-0,0038	-0,0117
1,0	0,5083	-0,1108	0,1988	0,3096	4,5	-0,0132	0,0085	-0,0023	-0,0108
1,1	0,4476	-0,1457	0,1510	0,2967	4,6	-0,0111	0,0089	-0,0011	-0,0100
1,2	0,3899	-0,1716	0,1091	0,2807	4,7	-0,0092	0,0090	0,0001	-0,0091
1,3	0,3355	-0,1897	0,0729	0,2626	4,8	-0,0075	0,0089	0,0007	-0,0082
1,4	0,2849	-0,2011	0,0419	0,2430	4,9	-0,0059	0,0087	0,0014	-0,0073
1,5	0,2384	-0,2068	0,0158	0,2226	5,0	-0,0046	0,0084	0,0019	-0,0065
1,6	0,1959	-0,2077	-0,0059	0,2018	5,1	-0,0033	0,0080	0,0023	-0,0057
1,7	0,1576	-0,2047	-0,0235	0,1812	5,2	-0,0023	0,0075	0,0026	-0,0049
1,8	0,1234	-0,1985	-0,0376	0,1610	5,3	-0,0014	0,0069	0,0028	-0,0042
1,9	0,0932	-0,1899	-0,0484	0,1415	5,4	-0,0006	0,0064	0,0029	-0,0035
2,0	0,0667	-0,1794	-0,0563	0,1230	5,5	0,0000	0,0058	0,0029	-0,0029
2,1	0,0439	-0,1675	-0,0618	0,1057	5,6	0,0005	0,0052	0,0029	-0,0023
2,2	0,0244	-0,1548	-0,0652	0,0895	5,7	0,0010	0,0046	0,0028	-0,0018
2,3	0,0080	-0,1416	-0,0668	0,0748	5,8	0,0013	0,0041	0,0027	-0,0014
2,4	-0,0056	-0,1282	-0,0669	0,0613	5,9	0,0015	0,0036	0,0026	-0,0010
2,5	-0,0166	-0,1149	-0,0658	0,0492	6,0	0,0017	0,0031	0,0024	-0,0007
2,6	-0,0254	-0,1019	-0,0636	0,0383	6,1	0,0018	0,0026	0,0022	-0,0004
2,7	-0,0320	-0,0895	-0,0608	0,0287	6,2	0,0019	0,0022	0,0020	-0,0002
2,8	-0,0369	-0,0777	-0,0573	0,0204	6,3	0,0019	0,0018	0,0018	0,0001
2,9	-0,0403	-0,0666	-0,0534	0,0132	6,4	0,0018	0,0015	0,0017	0,0003
3,0	-0,0423	-0,0563	-0,0493	0,0071	6,5	0,0018	0,0012	0,0015	0,0004
3,1	-0,0431	-0,0469	-0,0450	0,0019	6,6	0,0017	0,0009	0,0013	0,0005
3,2	-0,0431	-0,0383	-0,0407	-0,0024	6,7	0,0016	0,0006	0,0011	0,0006
3,3	-0,0422	-0,0306	-0,0364	-0,0058	6,8	0,0015	0,0004	0,0010	0,0006
3,4	-0,0408	-0,0237	-0,0323	-0,0085	6,9	0,0014	0,0002	0,0008	0,0006
					7,0	0,0013	0,0001	0,0007	0,0006

5.13.2 Plaques circulaires

La théorie des coques de révolution s'applique aux plaques circulaires et on se trouve dans la situation définie par la figure 5.23.



r = abscisse $(s \rightarrow r)$

(r, θ) : coordonnées polaires

$r_\varphi = \infty$ et $r_\theta = \infty$

$r_\varphi d\varphi \rightarrow dr$ $(\varphi \rightarrow r)$

$\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = 0$

$\cos \varphi = 1$

$\operatorname{ctg} \varphi = \infty$

méridien \rightarrow radial

Fig. 5.23 Plaque circulaire de rayon a et d'épaisseur t .

Les équations (5.4) à (5.8) deviennent (avec $(1/r_\theta) \operatorname{ctg} \varphi = (1/r) \cos \varphi = 1/r$)

$$\begin{aligned} N_r + r \frac{dN_r}{dr} - N_\theta + p_r r &= 0 \\ \frac{d}{dr} (r V_r) + p_z r &= 0 \\ M_r + r \frac{dM_r}{dr} - M_\theta - r V_r &= 0 \end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{5.56}$$

$$\theta_r = \frac{dw}{dr} \quad c_r = \frac{d\theta_r}{dr} = \frac{d^2w}{dr^2} \quad c_\theta = \frac{\theta_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} N_r &= C(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) & M_r &= D(\psi_r + \nu \psi_\theta) \\ N_\theta &= C(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) & M_\theta &= D(\psi_\theta + \nu \psi_r) \end{aligned} \tag{5.58}$$

On observe le *découplage complet* entre l'état membranaire

$$u, \quad \varepsilon_r, \quad \varepsilon_\theta, \quad N_r, \quad N_\theta, \quad p_r$$

de l'état flexionnel

$$w, \quad \theta_r, \quad c_r = -\psi_r, \quad c_\theta = -\psi_\theta, \quad M_r, \quad M_\theta, \quad V_r, \quad p_z$$

L'état membranaire est typiquement celui de l'élasticité plane en coordonnées polaires (TGC, vol. 3, sect. 5.10).

Pour l'état flexionnel, on introduit les courbures dans la loi constitutive

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \quad (5.59)$$

De la troisième équation d'équilibre, on tire

$$V_r = \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) + \frac{dM_r}{dr} = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \quad (5.60)$$

En introduisant cette valeur dans la deuxième équation d'équilibre (5.55), on obtient l'équation différentielle de la surface moyenne fléchie $w(r)$

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{p_z}{D} \quad (5.61)$$

qui résout le problème.

On donne ci-après la solution de deux problèmes qui présentent un intérêt pratique pour les coques de révolution.

Plaque appuyée uniformément chargée (fig. 5.24)

$$w = \frac{q}{64 D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right) \quad (5.62)$$

$$\theta_r = \frac{dw}{dr} = -\frac{qr}{16 D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right) \quad \theta_{r \max} = \theta_r \Big|_{r=a} = -\frac{qa^3}{8 D(1 + \nu)}$$

$$V_r = -\frac{qr}{2} \quad M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2) \quad M_\theta = \frac{q}{16} (a^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)) \quad (5.63)$$

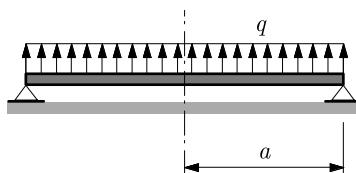
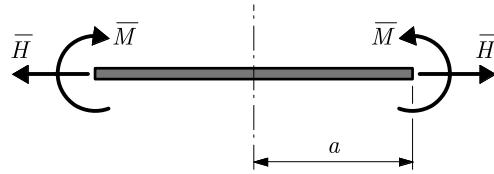


Fig. 5.24 Plaque circulaire uniformément chargée.

Plaque sous forces de bord (fig. 5.25)

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\bar{H}}{C(1+\nu)} r = \frac{\bar{H}}{Et} (1-\nu)r & u_{\max} = u|_{r=a} &= \frac{\bar{H}a}{C(1+\nu)} = \frac{\bar{H}a(1-\nu)}{Et} \\
 w &= -\frac{\bar{M}}{2D(1+\nu)}(a^2 - r^2) & (5.64) \\
 \theta_r &= \frac{\bar{M}r}{D(1+\nu)} & \theta_{r \max} = \theta_r|_{r=a} &= \frac{\bar{M}a}{D(1+\nu)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_r &= N_\theta = \bar{H} & (5.65) \\
 V_r &= 0 & M_r &= M_\theta = -\bar{M}
 \end{aligned}$$

**Fig. 5.25** Plaque circulaire sous forces de bord.**Remarque**

L'effet de bord des coques de révolution n'existe pas pour le cas particulier des plaques circulaires : les efforts appliqués à la circonférence extérieure se propagent sur toute l'étendue de la plaque.

6 Coques de révolution

Jonctions

6.1 Position du problème

6.1.1 Introduction

Lorsqu'on assemble plusieurs coques (fig. 6.1), il se produit le plus souvent, en leurs parallèles de *jonction* (ou d'*intersection*), un *effet de bord* qui se traduit par l'apparition d'efforts flexionnels localisés, même si la tangente au méridien est commune en ces parallèles. Ces efforts proviennent de l'*incompatibilité des déplacements membranaires le long des parallèles de jonction*.

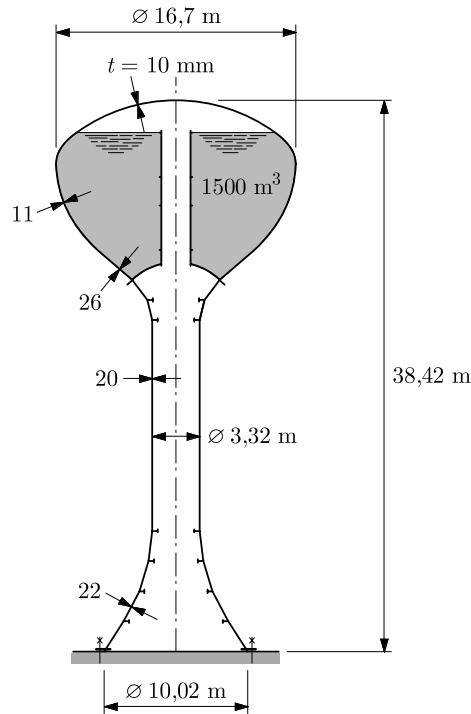


Fig. 6.1 Château d'eau en acier (coupe).

En effet, le seul état membranaire exige qu'il existe, le long de tout parallèle limitant une coque, des efforts normaux (N_φ) tangents au méridien, équilibrant les charges appliquées, et des conditions cinématiques laissant se développer librement les composantes w et θ_φ du déplacement (conditions aux limites membranaires, sect. 4.6). De telles conditions ne se rencontrent pratiquement jamais.

6.1.2 Notion de poussée au vide

Examinons le cas d'une calotte sphérique (rayon a , épaisseur t , ouverture 2α) soumise à une pression externe p . L'état membranaire fournit

$$N_\varphi = N_\theta = -\frac{pa}{2} \quad u = 0 \quad w = \frac{pa^2}{2Et} (1 - \nu)$$

Si les conditions aux limites sont celles de la figure 6.2 ($u = 0$), elles permettent le développement de l'état membranaire sans effort flexionnel aucun ; de telles conditions d'appui sont toutefois inhabituelles.

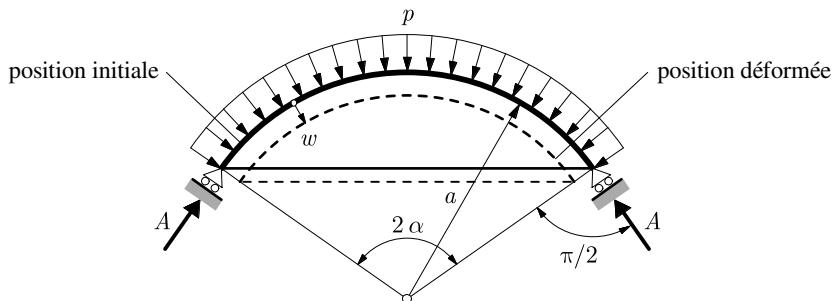


Fig. 6.2 Calotte sphérique en état membranaire ($A = |N_\varphi| = pa/2$).

D'ordinaire, une telle calotte est appuyée comme le montre la figure 6.3 ($w_Z = 0$). Bien que l'on puisse encore trouver la valeur de la réaction verticale R par l'équation d'équilibre global

$$R 2\pi a \sin \alpha = p\pi a^2 \sin^2 \alpha$$

d'où

$$R = \frac{pa}{2} \sin \alpha$$

le développement du seul état membranaire n'est plus possible, puisque, sur le parallèle d'appui, R n'équilibre pas l'effort N_φ , mais seulement sa composante verticale, d'intensité $|N_\varphi| \sin \alpha$.

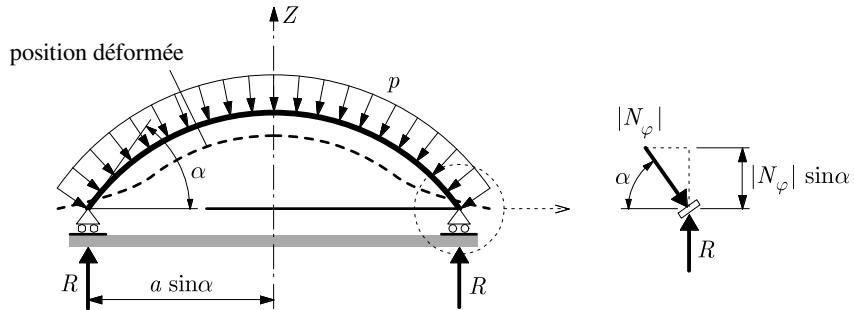


Fig. 6.3 Calotte sphérique sur un plan d'appui horizontal.

Pour résoudre ce problème, on décompose la sollicitation en une sollicitation membranaire et une sollicitation flexionnelle (fig. 6.4). On constate que la sollicitation flexionnelle est du type effet de bord ; elle est due à la composante horizontale P provenant de la décomposition de la réaction d'appui R . On appelle cette force **poussée au vide**, pour des raisons évidentes. On observe que cette manière de résoudre est de même nature que celle proposée au paragraphe 5.9.2 (superposition).

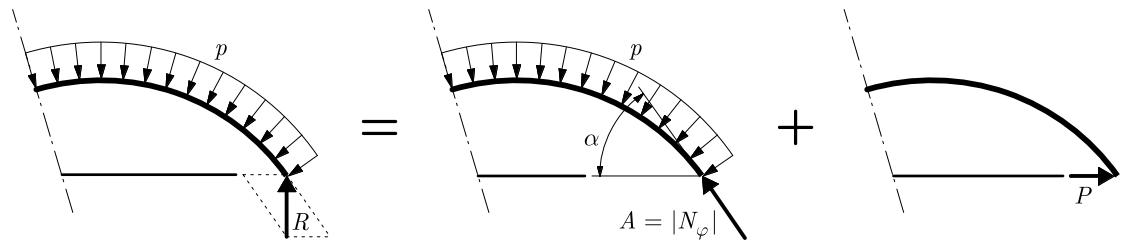


Fig. 6.4 Solution flexionnelle de la calotte sphérique : état réel = état membranaire + état flexionnel de bord ($\vec{R} = \vec{A} + \vec{P}$).

6.1.3 Détermination de la poussée au vide

Analytiquement, choisissant la poussée au vide positive dans le sens de la translation radiale u_X (même convention que pour la force de bord \vec{H} ; § 5.8.1), cette poussée vaut

$$P = \mp N_\varphi \cos \varphi_0 \quad (6.1)$$

où le signe négatif s'adresse à une face positive et inversement (fig. 6.5), et où l'angle φ_0 fixe la position du parallèle de bord.

Pratiquement, on détermine tout aussi aisément la poussée et son sens d'action par inspection du cas traité (sens physique). Dans le cas de la figure 6.4, on a

$$P = A \cos \alpha = \frac{pa}{2} \cos \alpha$$

Cette poussée aplatis la coque (fig. 6.3) et la déformée a ainsi une allure essentiellement différente de celle du cas membranaire.

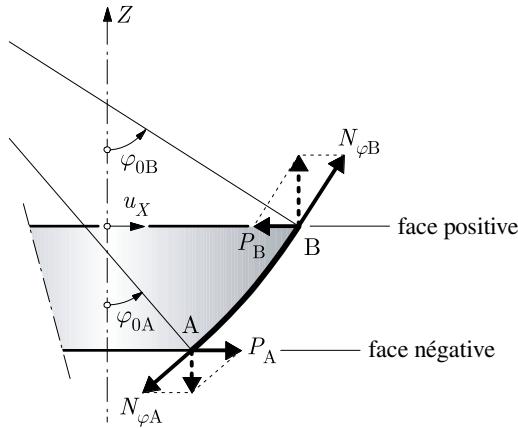


Fig. 6.5 Tronçon de coque tendue entre deux parallèles de jonction A et B : poussées au vide dans leur sens réel (déplacement relatif $w_Z = 0$ en A et B).

6.1.4 Reprise des poussées au vide

Les poussées au vide provoquent des efforts de bord importants. Aussi, pour les combattre, est-il judicieux de placer des *anneaux de raidissement* (fig. 6.6).

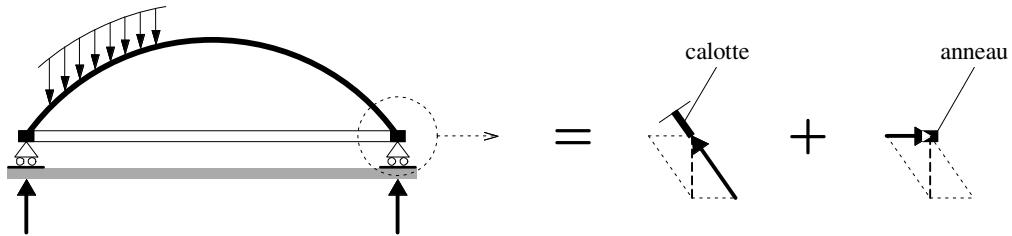


Fig. 6.6 Calotte avec anneau de raidissement à sa base (vue en coupe).

Dans l'esprit de la théorie membranaire, on peut prédimensionner ces anneaux sous les seules poussées au vide. Ils ne sont alors sollicités qu'à l'effort normal. Si ce dernier est de traction, il peut être intéressant de recourir à la précontrainte.

6.2 Anneau raidisseur

Lorsqu'une poutre d'axe circulaire est chargée par une force \bar{H} radiale et un moment \bar{M} tournant autour de l'axe, uniformément répartis, agissant à l'image des *forces de bord* (fig. 6.7), il en résulte les efforts intérieurs (effort normal et moment de flexion) et déplacements (radial et rotation)

$$\begin{aligned} N_\theta &= \bar{H}a & M_\theta &= -\bar{M}a \\ u_X &= \frac{\bar{H}a^2}{EA} & \theta_\varphi &= \frac{\bar{M}a^2}{EI} \end{aligned} \tag{6.2}$$

où a est le rayon de l'axe de la poutre, A l'aire de la section droite et I le moment d'inertie (supposé principal) par rapport à l'axe y contenu dans le plan de l'anneau. Il est admis que les dimensions de la section de l'anneau sont petites devant le rayon a .

On constate que l'anneau, sous \bar{H} , se comporte comme une pièce tendue (ou comprimée) ; la sollicitation par effort normal qui en résulte est classique (TGC vol. 2, sect. 4.6). Par contre, sous \bar{M} , l'anneau se comporte comme une poutre fléchie ; le moment de flexion M_θ est nécessaire pour garantir l'équilibre en rotation (d'un demi-anneau autour de son diamètre par exemple) et son effet correspond bien à celui de la rotation θ_φ due à \bar{M} , qui est de raccourcir les fibres annulaires supérieures et d'allonger les fibres inférieures (M_θ est donc négatif dans (6.2)). Il n'apparaît pas de moment de torsion, les sections droites tournant toutes du même angle θ_φ autour de l'axe de l'anneau.

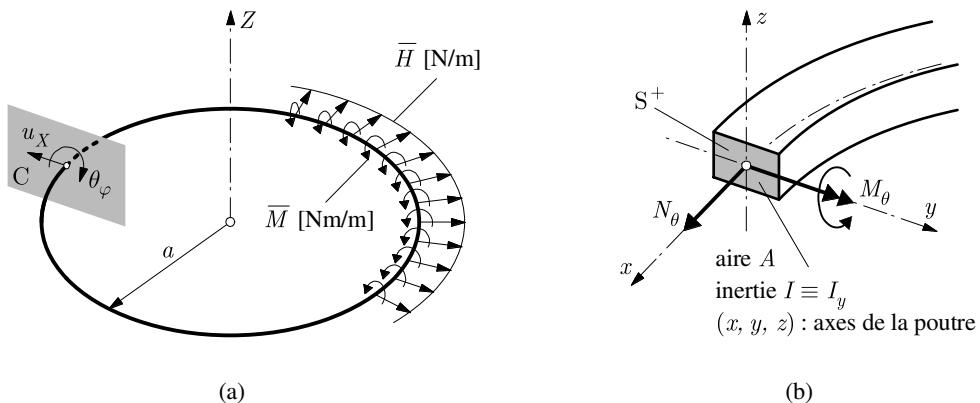


Fig. 6.7 Anneau raidisseur : (a) moment axial \bar{M} et force radiale \bar{H} ; (b) section droite dans la coupe C.

6.3 Réflexions sur les efforts aux jonctions

On considère les quatre récipients de la figure 6.8, destinés à contenir un fluide sous pression (*réservoirs sous pression*). Dans la moitié supérieure de cette figure, le fond est séparé du corps cylindrique pour montrer la transmission des efforts de l'un à l'autre.

Dans le premier cas (fig. 6.8a), où le fond hémisphérique se raccorde tangentiellement au cylindre, les efforts de membrane le long du parallèle commun AA s'autoéquilibrent ; il n'y a pas de poussée au vide. Dans le deuxième cas (fig. 6.8b), où la jonction entre fond et cylindre se fait à angle vif, il y a encore équilibre par les seuls efforts membranaires grâce à l'anneau raidisseur qui peut reprendre la poussée au vide. Dans ces deux cas, les effets flexionnels de bord le long de AA, bien qu'ils existent, ne sont pas nécessaires pour réaliser l'équilibre des charges sollicitant la coque, mais servent uniquement à assurer la compatibilité des déplacements (état d'autocontrainte). Ils peuvent avoir une valeur faible ; si, de plus, le matériau composant la coque est ductile, il est tolérable d'en faire abstraction dans les calculs en vertu du théorème statique de la plasticité (TGC vol. 2, sect. 17.6). Il y

a naturellement exception si le récipient est soumis à la fatigue (remplissages et vidanges fréquents) ou à l'instabilité. Enfin, l'anneau du deuxième cas est comprimé et doit donc être vérifié contre son *flambement*.

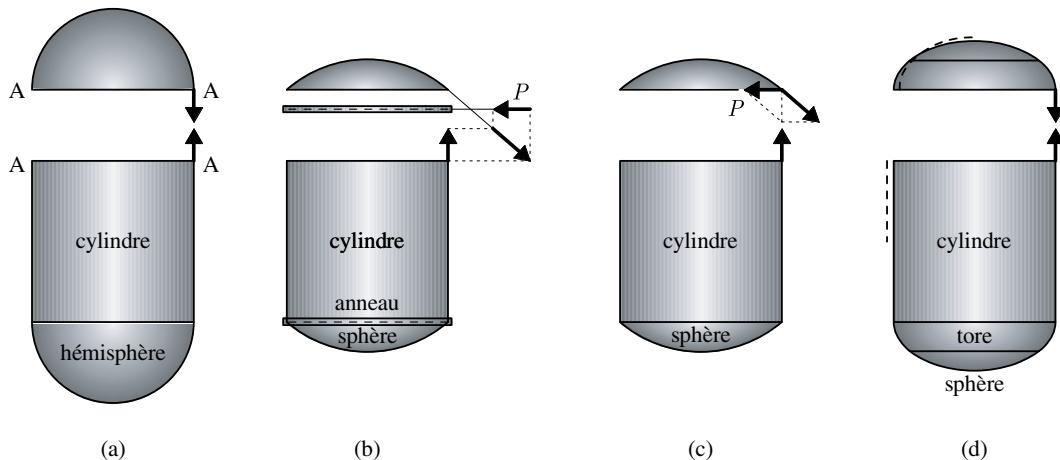


Fig. 6.8 Quatre conceptions d'un récipient sous pression ; forces de liaison pour raccord : (a) tangentiel (hémisphère) ; (b) à angle vif avec anneau de raidissement (calotte sphérique) ; (c) à angle vif non raidi (calotte sphérique) ; (d) tangentiel (tore).

Dans le troisième cas (fig. 6.8c) au contraire, il n'y a plus équilibre par les seuls efforts membranaires. Il faut alors faire l'analyse flexionnelle complète (superposition de la solution membranaire et de l'effet de bord dû à la *poussée au vide* ; sect. 6.4 et 6.5). L'effet de bord est toujours plus grand que dans les deux cas précédents.

Enfin, le quatrième cas (fig. 6.8d) représente un compromis : le fond bombé est moins encombrant que dans le premier cas, tout en assurant une jonction tangentielle évitant le raidisseur (cher). Cependant, le segment de tore de raccordement a souvent une courbure prononcée (t/r relativement grand) et se contracte au niveau de la jonction alors que le cylindre se dilate (en état membranaire ; trait interrompu) ; il en résulte que les effets de bord prennent une importance correspondante et doivent être estimés. De plus, la zone du tore est comprimée circonférentiellement ($N_\theta < 0$) et peut devenir instable. En somme, le tore joue un peu le rôle du raidisseur du deuxième cas.

Les cas examinés ci-dessus illustrent aussi la variété des comportements et phénomènes que l'on peut rencontrer aux jonctions, allant du plus simple (effet de bord, fig. 6.8a) au plus complexe (voillement, fig. 6.8d). Pour en réaliser une analyse précise, *il faut recourir à la méthode des éléments finis* (chap. 11), seule capable de fournir un résultat fiable sans devoir introduire trop d'hypothèses simplificatrices.

Dans bien des cas cependant, certaines simplifications sont effectivement justifiées. Elles conduisent à des techniques de calcul simples, permettant d'obtenir un résultat de précision fort satisfaisante. Ces techniques, exposées ci-après, permettent le prédimensionnement et, surtout, le contrôle de la validité des résultats d'un calcul aux éléments finis.

6.4 Calcul des jonctions de coques

6.4.1 Hypothèses et méthodes de résolution

La jonction de deux ou plusieurs coques le long d'un parallèle, appelé *cercle nodal* (ou plus simplement *nœud*), est généralement de nature rigide : il y a continuité de tous les déplacements (en particulier la translation radiale et la rotation). De plus, il y a équilibre du cercle nodal (en particulier des forces horizontales et des moments).

Ces exigences traduisent la méthode générale de résolution d'un problème de jonction de coques : *exprimer les conditions aux limites* (sect. 5.6). Par exemple, dans le cas de la figure 6.8(c), ces conditions sont, le long du parallèle commun au cylindre (indice supérieur *c*) et à la sphère (indice supérieur *s*),

$$w^c = -u_X^s \quad \theta_x^c = \theta_\varphi^s \quad M_x^c = M_\varphi^s \quad V_x^c = H^s \quad (6.3)$$

Si l'on suppose le cylindre *long*, ces conditions conduisent à un système de quatre équations pour quatre constantes d'intégration (deux pour le cylindre et deux pour la calotte sphérique). Si le cylindre est *court*, il y a interaction du cylindre avec les deux calottes sphériques, ce qui conduit à huit conditions couplées. Enfin, dans le cas plus général où les coques sont hyperstatiques à l'effort N_φ , il s'ajoute deux conditions axiales, ce qui porte le nombre des équations à six ou douze.

Dans la suite, on suppose que

- en état membranaire, l'assemblage des coques est isostatique ;
- les coques sont suffisamment *longues* pour éviter l'interaction entre les jonctions ;
- la méthode par superposition *état membranaire + effet de bord* s'applique.

Grâce à la première hypothèse, aucune compatibilité n'est à exprimer, en translation, selon l'axe de révolution ; seules subsistent les conditions en *translation radiale* et en *rotation* (équilibre et compatibilité) ; l'isostaticité membranaire fournit la distribution des N_φ , dont on peut déduire les poussées au vide P intervenant dans ces conditions. Par la seconde hypothèse, on peut traiter chaque jonction indépendamment de ses voisines. Enfin, la deuxième et la troisième hypothèses permettent d'utiliser certains résultats approchés des coques soumises à des forces de bord (par exemple l'approximation de Geckeler).

Lorsqu'on entre dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, ce qui est fréquemment le cas, et en utilisant la méthode des forces ou des déplacements, on peut résoudre les problèmes de jonction de coques de manière plus rationnelle qu'en exprimant les conditions aux limites (moins d'équations simultanées).

Le principe est le suivant :

A l'intersection de deux ou plusieurs coques, la solution membranaire conduit à des déplacements et efforts discontinus, tant en translation qu'en rotation ; la continuité cinématique (méthode des forces) ou statique (méthode des déplacements) est rétablie à l'aide d'effets de bord, provoquant par ailleurs des déplacements et efforts intérieurs locaux ; la solution complète s'obtient par superposition des effets membranaires et locaux.

Ci-après, les indices supérieurs désignent les coques, comme dans (6.3) ; quant aux indices inférieurs *m* (membrane), *p* (poussée) et *f* (effet flexionnel de bord), ils ne sont introduits que si la compréhension le nécessite, en particulier pour les déplacements intervenant dans les équations et calculs.

6.4.2 Méthode des forces

On considère, pour fixer les idées, la jonction A de deux coques a et b (fig. 6.9). Par la théorie membranaire, on détermine, au parallèle de jonction,

- les translations radiales $u_{X,m}^a, u_{X,m}^b$;
- les rotations $\theta_{\varphi,m}^a, \theta_{\varphi,m}^b$;
- les efforts normaux méridiens $N_{\varphi}^a, N_{\varphi}^b$;
- les poussées au vide P^a, P^b (§ 6.1.3) ; il faut les reporter sur la figure *dans le bon sens d'action*, tel que l'équilibre vertical soit d'emblée satisfait (sens inverse à celui de la composante horizontale de N_{φ}).

On peut dès lors introduire, aux lèvres de la coupure A, les paires de forces hyperstatiques de bord X_1 (moment) et X_2 (force horizontale), qui assurent la compatibilité des déplacements des deux coques (coupure double).

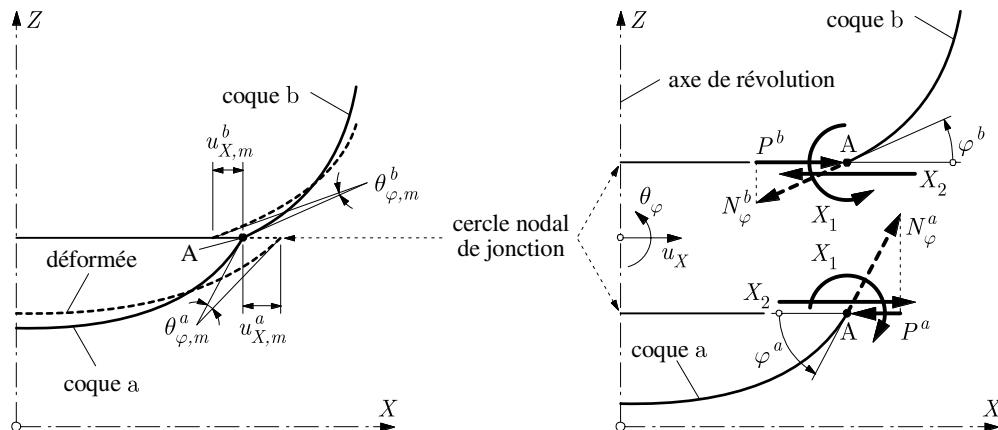


Fig. 6.9 Jonction de deux coques au nœud A.

Dans les équations de compatibilité cinématique

$$\begin{aligned} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + f_{10} &= 0 && \text{(rotation)} \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + f_{20} &= 0 && \text{(translation)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

les coefficients de flexibilité $f_{11}, f_{12} = f_{21}$ et f_{22} sont à calculer à partir de (5.35) (cylindre), (5.52) (sphère), (5.64) (plaqué) ou (6.2) (anneau de raidissement). Quant aux termes indépendants f_{10} et f_{20} , ils se composent de deux parties

$$f_{10} = f_{10m} + f_{10p} \quad f_{20} = f_{20m} + f_{20p} \quad (6.5)$$

où les f_m sont les déplacements membranaires $u_{X,m}$ et $\theta_{\varphi,m}$, et où les f_p sont les déplacements provoqués par les poussées au vide P (à tirer de (5.35), (5.52), (5.64) ou (6.2) à nouveau).

Les conventions de signe sont celles de la méthode des forces (un déplacement est positif s'il a le même sens que l'hyperstatique associée).

Une fois (6.4) résolu, on peut obtenir l'effet de bord sous moment (X_1) et force horizontale (somme algébrique de X_2 et P).

6.4.3 Méthode des déplacements

Lorsque la jonction comporte plus de deux éléments (trois coques ou plus ; un anneau raidisseur et deux coques ou plus ; etc.), il est indiqué de résoudre par la méthode des déplacements, de manière à n'avoir que les deux inconnues que sont la rotation et le déplacement radial communs de tous les éléments assemblés.

Les conventions de signe de la méthode des déplacements sont :

- rotations θ_φ et moments M associés : positifs dans le sens trigonométrique ;
- translations u_X et forces H, P associées : positives dans le sens X^+ .

Les équations d'équilibre

$$\begin{aligned} K_{11}\theta_\varphi + K_{12}u_X &= M + \bar{S}_1 && \text{(rotation)} \\ K_{21}\theta_\varphi + K_{22}u_X &= P + \bar{S}_2 && \text{(translation)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

expriment l'équilibre de la jonction (*cercle nodal*). Dans ces équations, $K_{11}, K_{12} = K_{21}, K_{22}$ sont les coefficients de rigidité et \bar{S}_1, \bar{S}_2 les charges le long des cercles nodaux, provenant des diverses coques assemblées ; M et P sont les forces directement appliquées aux cercles nodaux, par exemple les poussées au vide, la charge radiale due à une précontrainte, etc. Toutes les forces sont définies par unité de longueur de cercle nodal.

On construit les coefficients de rigidité $K_{11}, K_{12} = K_{21}$ et K_{22} par assemblage, à partir des matrices de rigidité des éléments ; ces matrices sont déduites des équations (5.35), (5.52), (5.64) ou (6.2) résolues par rapport aux forces, ce qui s'écrit

$$\begin{Bmatrix} \bar{M} \\ \bar{H} \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \theta_\varphi \\ u_X \end{Bmatrix}_e \quad (6.7)$$

ou

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e \quad (6.8)$$

où e désigne l'élément structural considéré. On obtient :

- cylindre (fig. 6.10a) (avec, dans (5.35), $w_{\max} \equiv -u_X$)

$$\begin{Bmatrix} \bar{M} \\ \bar{H} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{2\lambda^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\lambda} & -1 \\ -1 & \frac{2\lambda}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\varphi \\ u_X \end{Bmatrix} \quad (6.9)$$

- sphère (fig. 6.10b)

$$\begin{Bmatrix} \bar{M} \\ \bar{H} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{2\lambda^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{1}{\sin \alpha} \\ \frac{1}{\sin \alpha} & \lambda \frac{2}{a \sin^2 \alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\varphi \\ u_X \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

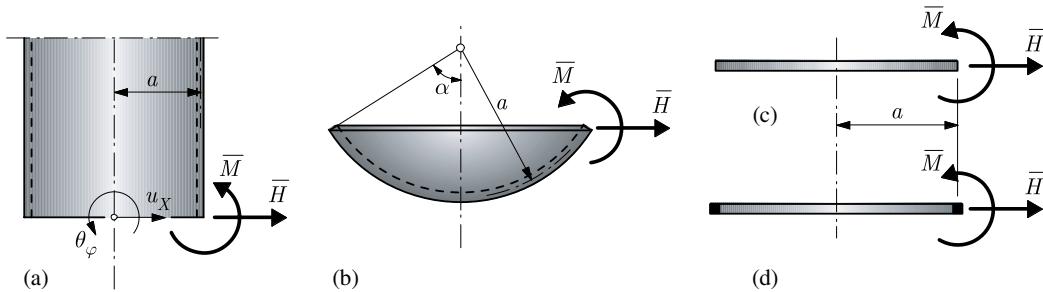


Fig. 6.10 Eléments structuraux associés aux équations (6.9) à (6.12) : (a) cylindre ; (b) sphère ; (c) plaque ; (d) anneau.

- plaque (fig. 6.10c)

$$\begin{Bmatrix} \bar{M} \\ \bar{H} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D(1+\nu)}{a} & 0 \\ 0 & \frac{Et}{a(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\varphi \\ u_X \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

- anneau (fig. 6.10d)

$$\begin{Bmatrix} \bar{M} \\ \bar{H} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{EA}{a^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\varphi \\ u_X \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Les coefficients \bar{S}_1 et \bar{S}_2 dans (6.6) sont les forces nodales dans la structure bloquée, dues aux charges appliquées sur les diverses coques ; on les obtient par assemblage des coefficients dus aux déplacements membranaires $\theta_{\varphi,m}$ et $u_{X,m}$

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{Bmatrix}_e = \mathbf{k}_e \begin{Bmatrix} \theta_{\varphi,m} \\ u_{X,m} \end{Bmatrix}_e \quad (6.13)$$

Après avoir résolu (6.6), qui fournit les déplacements réels θ_φ et u_X du parallèle de jonction, on peut trouver les déplacements associés au seul effet de bord $\theta_{\varphi,f}$ et $u_{X,f}$ par

$$\theta_{\varphi,f} = \theta_\varphi - \theta_{\varphi,m} \quad u_{X,f} = u_X - u_{X,m} \quad (6.14)$$

et procéder alors par superposition selon la méthode habituelle pour calculer toute grandeur utile (réel = membrane + effet de bord).

6.5 Application – Fond de réservoir sous pression

Un réservoir cylindrique c est fermé par un fond sphérique s d'ouverture $2\alpha = \pi/2$ (fig. 6.11a) ; la pression interne p est uniforme ; les deux coques ont la même épaisseur t , et des rayons a (cylindre) et $a\sqrt{2}$ (sphère). On admet que $a/t = 50$ et $\nu = 0,3$.

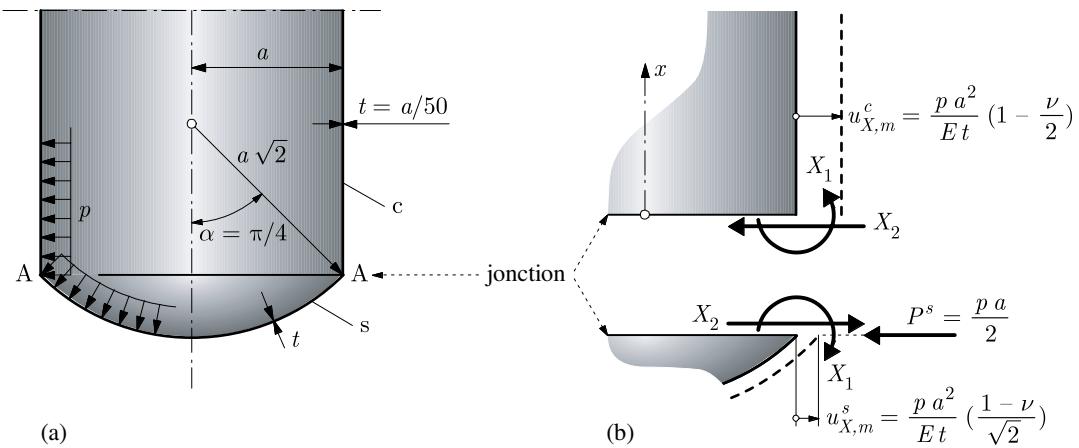


Fig. 6.11 Jonction sphère-cylindre : (a) géométrie et charge ;
(b) choix de X_1 et X_2 pour la méthode des forces.

6.5.1 Etat membranaire

Le comportement membranaire est isostatique et il n'y a pas de déplacement relatif axial au niveau du parallèle de jonction AA. On obtient les résultats suivants :

Sphère (indice supérieur s)

$$N_\varphi = N_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} pa$$

$$u = C \sin \varphi \quad (C = \text{cste}) \quad w = C \cos \varphi - \frac{pa^2}{Et} (1 - \nu) \quad \theta_\varphi = 0$$

$$u_X = \frac{pa^2}{Et} (1 - \nu) \sin \varphi \quad w_Z = C - \frac{pa^2}{Et} (1 - \nu) \cos \varphi$$

En $\varphi = \alpha = \pi/4$ (fig. 6.10b)

$$w_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{pa^2}{Et} (1 - \nu)$$

d'où

$$u_{X,m}^s = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{pa^2}{Et} (1 - \nu) = 24,7487 \frac{pa}{E} \quad \theta_{\varphi,m}^s = 0$$

Cylindre (indice supérieur c)

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{2} pa & N_\theta &= pa \\ u &= \frac{pa}{Et} x \left(\frac{1}{2} - \nu \right) + C & w &= -\frac{pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) & \theta_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

En $x = 0$ (fig. 6.10b), $u = 0 \Rightarrow C = 0$, d'où

$$u_{X,m}^c = -w = \frac{pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) = 42,5 \frac{pa}{E} \quad \theta_{\varphi,m}^c = 0$$

6.5.2 Etude de la jonction

Seule la sphère engendre une poussée au vide (intensité ; sens selon fig. 6.11b) valant

$$P^s = N_\varphi \cos \alpha = \frac{1}{2} pa = 25 pt$$

Les paramètres (5.21) λ de la sphère et du cylindre

$$(\lambda^s)^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a\sqrt{2}}{t} \right)^2 = 6(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{t} \right)^2 \quad (\lambda^c)^4 = 3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{t} \right)^2$$

sont tels que, en notant simplement λ le paramètre du cylindre, on a

$$(\lambda^s)^4 = 2\lambda^4 \quad (\lambda^s)^3 = \sqrt[4]{8} \lambda^3 \quad (\lambda^s)^2 = \sqrt{2} \lambda^2 \quad \lambda^s = \sqrt[4]{2} \lambda$$

avec $\lambda = 9,0892$.

Méthode des forces

On choisit X_1 et X_2 (fig 6.11b), puis on calcule les différents termes de (6.4)

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{4\lambda^3}{Eta} + \frac{4\sqrt[4]{8}\lambda^3}{Eta\sqrt{2}} & f_{12} = f_{21} &= 0 & f_{22} &= \frac{2a\lambda}{Et} + \frac{2a\sqrt{2}}{Et} \sqrt[4]{2} \lambda \frac{1}{2} \\ f_{10} &= -\frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{Et} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{pa}{2} & f_{20} &= u_{X,m}^s - u_{X,m}^c - \frac{2a\sqrt{2}}{Et} \sqrt[4]{2} \lambda \frac{1}{2} \frac{pa}{2} \end{aligned}$$

Le système (6.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda^3}{aEt} \left(1 + \sqrt[4]{2} \right) X_1 - \frac{\lambda^2 pa}{Et} &= 0 \\ \frac{a\lambda}{Et} \left(2 + \sqrt[4]{8} \right) X_2 + \frac{pa^2}{Et} \left(\frac{1 - \nu}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{\nu}{2} - \frac{\sqrt[4]{8}\lambda}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$X_1 = 31,41 pt^2 \quad X_2 = 11,95 pt$$

Les forces de bord sur le cylindre sont X_1 et X_2 , et sur la sphère X_1 et $P^s - X_2 = 13,05 pt$ (vers l'intérieur ; fig. 6.13).

Méthode des déplacements

On prend garde au sens positif des déplacements (θ_φ , u_X) et des forces qui leur sont associées (fig. 6.12a). Les divers coefficients de (6.6) valent

$$K_{11} = \frac{Eta}{2\lambda^3} + \frac{Eta\sqrt{2}}{2\sqrt[4]{8}\lambda^3} \quad K_{12} = K_{21} = 0 \quad K_{22} = \frac{Et}{\lambda a} + \frac{Et}{\sqrt[4]{2}\lambda a\sqrt{2}} 2$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \end{Bmatrix} = \frac{Et}{2\sqrt{2}\lambda^2} \begin{bmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}\lambda} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \frac{4\sqrt{2}\lambda}{a\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{X,m}^s \end{Bmatrix} + \frac{Et}{2\lambda^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\lambda} & -1 \\ -1 & \frac{2\lambda}{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{X,m}^c \end{Bmatrix} = \frac{pa^2}{2\lambda^2} \begin{Bmatrix} -0,355025 \\ 2,877255\frac{\lambda}{a} \end{Bmatrix}$$

$$M = 0 \quad P = -P^s = -\frac{1}{2}pa$$

Le système (6.6) s'écrit

$$\frac{Eta}{2\lambda^3} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + 1 \right) \theta_\varphi = -0,355025 \frac{pa^2}{2\lambda^2}$$

$$\frac{Et}{a\lambda} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right) u_X = -\frac{pa}{2} + 2,877255 \frac{pa}{2\lambda}$$

d'où

$$\theta_\varphi = -87,6444 \frac{p}{E} \quad u_X = -70,9385 \frac{pa}{E}$$

qui sont les déplacements *réels* du nœud A (fig. 6.12b).

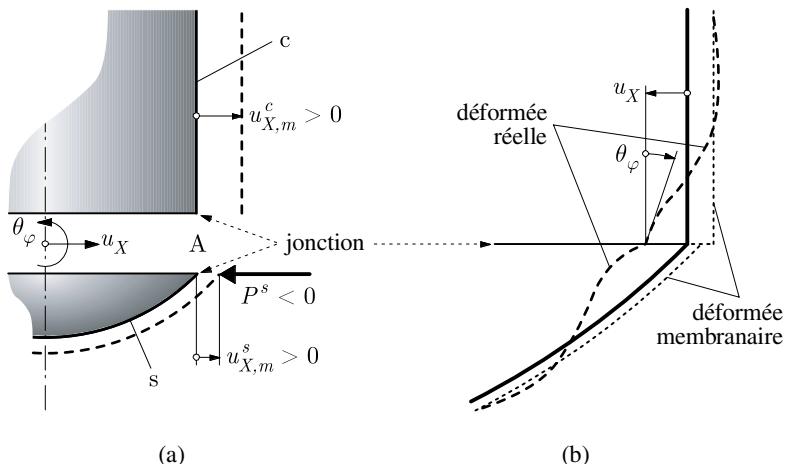


Fig. 6.12 Jonction sphère-cylindre : (a) convention de signe pour la méthode des déplacements ; (b) déformée.

On en déduit les déplacements propres à l'effet de bord seul par (6.14)

$$\theta_{\varphi,f}^s = \theta_{\varphi} - \theta_{\varphi,m}^s = -87,6444 \frac{p}{E} \quad u_{X,f}^s = u_X - u_{X,m}^s = -95,6872 \frac{pa}{E}$$

$$\theta_{\varphi,f}^c = \theta_{\varphi} - \theta_{\varphi,m}^c = -87,6444 \frac{p}{E} \quad u_{X,f}^c = u_X - u_{X,m}^c = -113,4385 \frac{pa}{E}$$

Puis, par (6.10) pour la sphère et (6.9) pour le cylindre, on trouve les forces de bord

$$\bar{M}^s = -31,41 pt^2 \quad \bar{H}^s = -13,05 pt$$

$$\bar{M}^c = 31,41 pt^2 \quad \bar{H}^c = -11,95 pt$$

où les signes donnent le sens d'action (fig. 6.13).

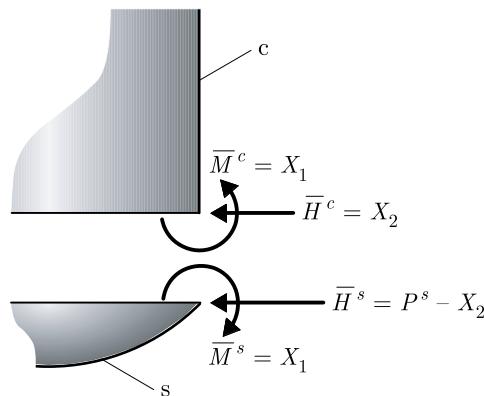


Fig. 6.13 Forces de bord.

6.6 Exercices

6.6.1 Un cylindre circulaire, de longueur L , de rayon a et d'épaisseur t , est soumis à une pression uniformément répartie p sur une moitié seulement de la coque (fig. Ex. 6.6.1). On admet que $L/2$ est grand. Les deux constantes élastiques du matériau sont le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson ν . Déterminer le déplacement radial, la rotation et les efforts intérieurs dans la section médiane (en $L/2$) de ce cylindre.

Note : ce problème se rencontre par exemple lors de l'enroulement, sur un tambour, d'un câble soumis à tension constante.

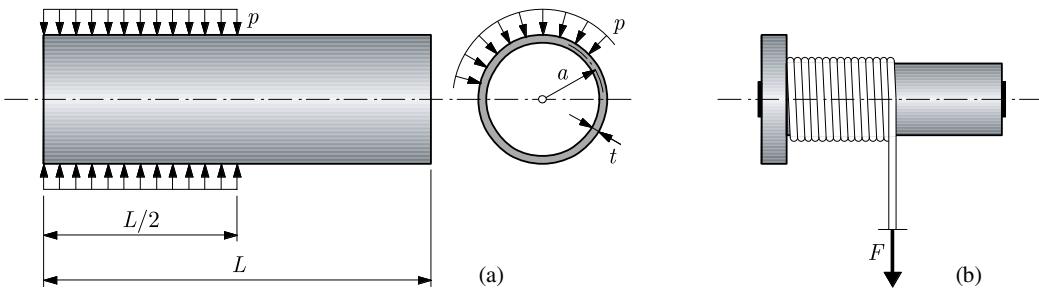


Fig. Ex. 6.6.1 (a) géométrie et charge ; (b) cas pratique.

6.6.2 (Suite du précédent.) Le long d'une génératrice du cylindre, tracer l'allure de la déformée w et des diagrammes des efforts intérieurs N_x , N_θ , M_x , M_θ et V_x . Calculer quelques valeurs caractéristiques pour les données numériques suivantes :

- cylindre : $L = 160$ cm ; $a = 50$ cm ; $t = 3$ cm ;
- charge : $p = 0,6$ kN/cm² ;
- matériau (acier) : $E = 21\,000$ kN/cm² ; $\nu = 0,3$.

Où se produit la plus forte sollicitation de la matière ?

6.6.3 Une calotte sphérique, d'ouverture 2α et d'épaisseur t , repose sur des appuis à rouleaux selon un parallèle de diamètre L (fig. Ex. 6.6.3). Elle est soumise à une charge verticale p uniformément répartie sur l'horizontale. Les constantes élastiques du matériau sont E et ν . On spécifie les données suivantes :

- sphère : $\alpha = 35^\circ$; $t = 8$ cm ; $L = 36$ m ;
- charge : $p = 2$ kN/m² ;
- matériau (béton) : $E = 2\,100$ kN/cm² ; $\nu = 0,2$.

- 1) Calculer les efforts membranaires.
- 2) Calculer les déplacements membranaires u_X et θ_φ au niveau du parallèle d'appui.
- 3) Calculer M_φ max et N_θ max.
- 4) Dessiner la répartition correcte de N_θ le long d'un méridien.
- 5) A titre qualitatif, calculer les contraintes correspondantes dans le béton supposé non fissuré.

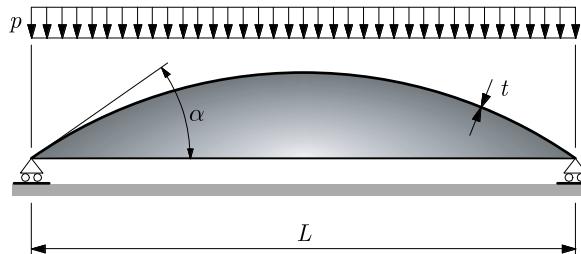


Fig. Ex. 6.6.3

6.6.4 La calotte sphérique de l'exercice précédent est maintenant raidie par un anneau de section rectangulaire $b \times h = 60 \times 45$ [cm] (fig. Ex. 6.6.4).

- 1) Calculer l'effort normal dans l'anneau en théorie membranaire.
- 2) Calculer la jonction sphère-anneau.
- 3) Déduire la valeur correcte des efforts dans l'anneau.
- 4) Déduire la valeur maximale de N_θ et M_φ dans la sphère.

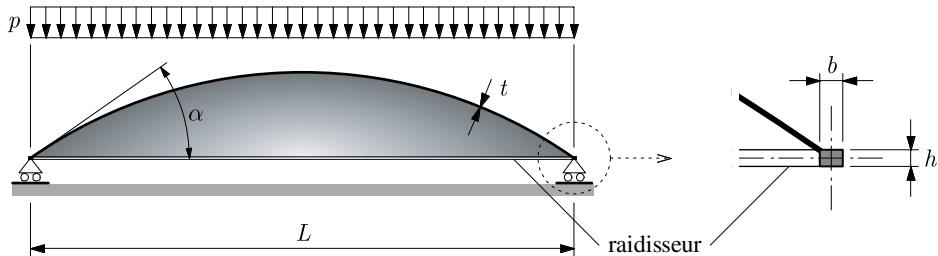


Fig. Ex. 6.6.4

7 Coques cylindriques

Théorie membranaire

7.1 Géométrie

La surface moyenne cylindrique Σ de la coque peut être engendrée par une droite, la *génératrice*, se déplaçant parallèlement à elle-même en suivant une courbe, la *directrice* (fig. 7.1). La directrice est admise plane et les génératrices sont normales au plan contenant la directrice. Inversement, la surface moyenne s'obtient aussi en faisant se déplacer la directrice parallèlement à elle-même le long d'une génératrice (surface de translation). Conventionnellement, on place les génératrices à l'horizontale. La figure 7.1 montre la surface moyenne et les coordonnées ; génératrices et directrices sont les lignes de courbure (x, φ) .

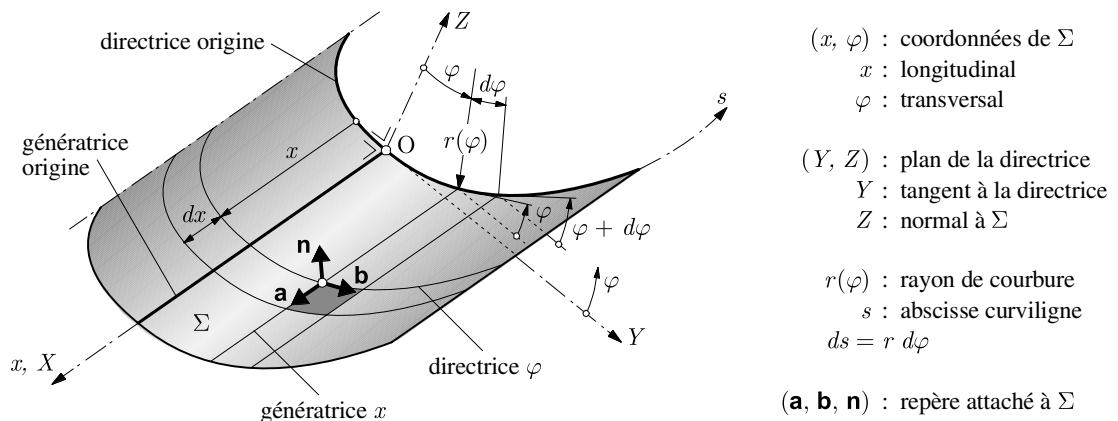


Fig. 7.1 Coque cylindrique.

Si la directrice est une courbe fermée (cercle, ellipse), la coque est dite *fermée* également (tuyau). Si la directrice est ouverte (arc de cercle, demi-ellipse), la coque est dite *ouverte* et qualifiée de *voûte*. La distinction est importante, car le comportement structural peut être très différent : tout réside dans la présence ou non de génératrices formant bords libres.

Ces coques sont appuyées sur des organes d'entretoisement qui épousent la forme de la directrice, les *diaphragmes*, et sollicitées par des charges qui, le plus souvent, agissent normalement aux génératrices. Elles ont, vues en élévation dans le plan (X, Z) , l'aspect général de poutres et s'appellent alors **coques cylindriques autoportantes**. Leur emploi comme couverture est courant (fig. 7.2).

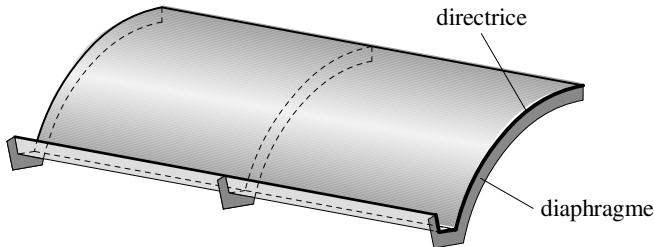


Fig. 7.2 Shed autoportant à deux travées (coque cylindrique ouverte).

Remarque

Logiquement, la coordonnée curviligne devrait être désignée par θ , et non φ ; on a cédé à l'usage général, qui utilise φ .

7.2 Equilibre

On isole un élément de coque ($dx, r d\varphi$), on y porte les efforts membranaires et les charges (fig. 7.3), puis on en fait l'équilibre dans le repère $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})$. Les forces $N_\varphi dx$ ont une composante $N_\varphi dx d\varphi$ selon \mathbf{n} . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + p_\varphi &= 0 \\ N_\varphi + rp_z &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

avec $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$. On résout aisément ces trois équations en remontant à partir de la dernière.

On déduit directement N_φ de la troisième équation, sans intégration. Cet effort intérieur ne peut donc être influencé par les conditions aux limites. Cette particularité joue un rôle important dans le cas des voûtes autoportantes, comportant des génératrices formant bord libre (§ 7.5.3). De plus, N_φ ne dépend que de la valeur locale de la composante normale p_z de la charge.

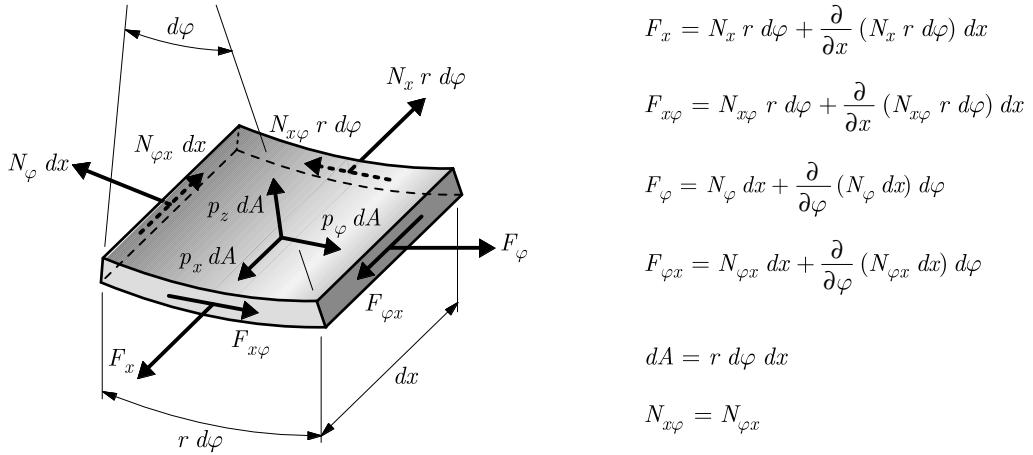


Fig. 7.3 Élément de coque cylindrique isolé : efforts membranaires et charges.

Connaissant N_φ , on trouve $N_{x\varphi}$ en intégrant la deuxième équation (7.1). On en déduit N_x en intégrant la première équation. Ces deux intégrations portant sur x , il apparaît, en guise de constantes, deux fonctions f_1 et f_2 de φ seul. On obtient

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -rp_z \\ N_{x\varphi} &= - \int_x \left(p_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \right) dx + f_1(\varphi) \\ N_x &= - \int_x \left(p_x + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) dx + f_2(\varphi) \end{aligned} \quad (7.2)$$

La présence des deux fonctions f_1 et f_2 montre que les conditions aux limites doivent porter sur N_x et $N_{x\varphi}$ dans les sections $x = \text{cste}$, c'est-à-dire que la coque doit s'appuyer sur des éléments transversaux qui suivent la forme de la directrice (§ 7.5.1 et 7.5.2).

Changement indépendant de x

On rencontre fréquemment le cas de charge suivant, où les composantes de la charge sont indépendantes de x , soit

$$p_x = p_x(\varphi) \quad p_\varphi = p_\varphi(\varphi) \quad p_z = p_z(\varphi) \quad (7.3)$$

Posons

$$F(\varphi) = p_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} = p_\varphi + \frac{1}{r} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} \quad (7.4)$$

car $N_\varphi = -rp_z(\varphi)$ ne dépend, comme r , que de φ . Alors, en intégrant (7.2),

$$N_{x\varphi} = -xF(\varphi) + f_1(\varphi) \quad (7.5)$$

$$N_x = \frac{x^2}{2r} \frac{dF}{d\varphi} - \frac{x}{r} \frac{df_1}{d\varphi} - xp_x + f_2(\varphi) \quad (7.6)$$

7.3 Cinématique

La figure 7.4 décrit, en plan et en élévation, la cinématique d'un élément ABCD de coque.

La dilatation longitudinale ε_x est immédiate, puisque AB est sur une génératrice rectiligne. La dilatation transversale ε_φ s'obtient de la même manière que pour les coques de révolution (première équation (4.11), § 4.5.1) : sous v seul, $\varepsilon_\varphi = \partial v / \partial s = (1/r)(\partial v / \partial \varphi)$ (car $\partial / \partial s = (1/r)(\partial / \partial \varphi)$), et sous w seul, $\varepsilon_\varphi = -(w d\varphi) / (r d\varphi) = -w/r$. Enfin, le glissement $\gamma_{x\varphi}$ est également immédiat. La cinématique membranaire est donc

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right) \quad \gamma_{x\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.7)$$

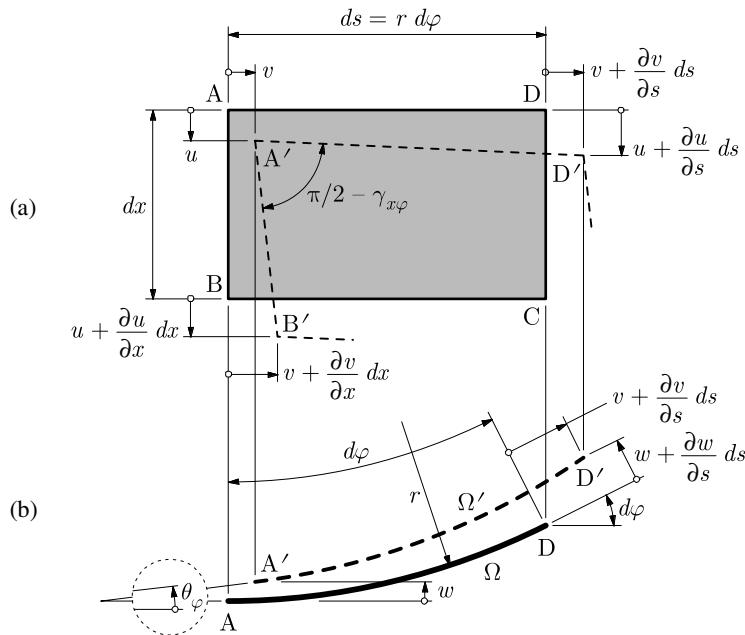


Fig. 7.4 Cinématique : (a) vue dans le plan tangent ; (b) élévation selon la directrice.

Rotations

Les deux rotations de la normale ou, encore, les deux variations de la pente (ou de l'angle de la tangente) s'obtiennent aisément. Le long de la génératrice rectiligne, la rotation est simplement la dérivée du déplacement transversal ; le long de la directrice, la rotation s'obtient de la même façon que (4.20) pour les coques de révolution. Ainsi

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_\varphi = \frac{1}{r} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (7.8)$$

7.4 Loi constitutive et bilan

La loi de Hooke s'écrit

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et} (N_x - \nu N_\varphi) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Et} (N_\varphi - \nu N_x) \quad \gamma_{x\varphi} = \frac{1}{Gt} N_{x\varphi} \quad (7.9)$$

Les neuf équations (7.1), (7.7) et (7.9) permettent de trouver les trois efforts intérieurs N_x , N_φ et $N_{x\varphi}$, les trois déformations ε_x , ε_φ et $\gamma_{x\varphi}$, et les trois déplacements u , v et w . Si la coque a un caractère isostatique, les efforts intérieurs peuvent se calculer directement à partir des trois seules équations d'équilibre (7.1).

7.5 Conditions aux limites

7.5.1 Conditions générales

L'intégration des équations de la théorie membranaire des coques cylindriques montre que les conditions aux limites doivent s'exprimer *le long des directrices* ($x = \text{cste}$) et peuvent porter sur les grandeurs suivantes (fig. 7.5)

$$N_x, \quad N_{x\varphi} \quad u, \quad v \quad (7.10)$$

Il y a deux conditions par bord directrice ; ces résultats sont en accord avec ceux de la théorie générale (§ 3.2.3). S'il y a autant de conditions statiques que cinématiques, la coque est isostatique.

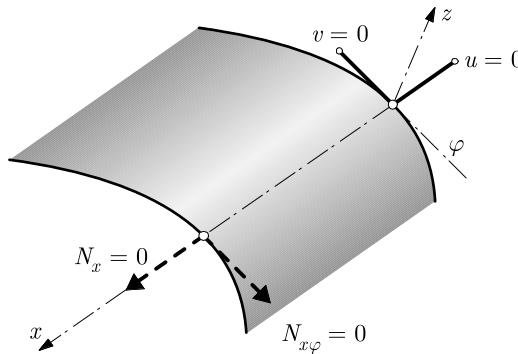


Fig. 7.5 Conditions aux limites cinématiques (u , v) et statiques (N_x , $N_{x\varphi}$).

Remarque

Il n'y a pas de conditions aux limites sur w !

7.5.2 Diaphragmes

En théorie membranaire, les conditions cinématiques sont indispensables pour garantir la forme et la raideur de la coque : cette dernière doit être fixée à des éléments transversaux plans ($x = \text{cste}$) épousant la forme de la directrice, les *diaphragmes*. Pratiquement, le diaphragme est une paroi (pleine ou évidée), une poutre courbe ou un treillis.

La fonction première du diaphragme est d'assurer la condition cinématique $v = 0$; ce faisant, il reprend l'effort tangentiel $N_{x\varphi}$ (pour le transmettre à ses propres appuis). La résultante des $N_{x\varphi}$ sur un diaphragme représente la réaction d'appui globale de la coque sous les charges transversales (p_φ et p_z). Si $v = 0$, le diaphragme est dit infiniment rigide dans son plan.

Hors de son plan, le diaphragme est admis infiniment souple (u libre). Par ailleurs, il ne devrait pas entraver la composante w . Cette dernière se produisant dans le plan du diaphragme, on voit qu'il est quasiment impossible de satisfaire aux conditions cinématiques membranaires en pratique. De même pour un encastrement, on peut réaliser les conditions $u = 0$ et $v = 0$, mais w sera imposé nul également.

Dans le cas de la figure 7.6(a) par exemple, la coque s'appuie sur deux diaphragmes d'extrémité ; les conditions aux limites sont donc

$$v = 0 \quad \text{et} \quad N_x = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = L$$

soit deux conditions cinématiques et deux conditions statiques (coque isostatique). Dans le cas de la figure 7.6(b), où la coque est à l'image d'une console, les conditions sont (on suppose w libre en $x = 0$)

$$u = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$N_x = 0 \quad \text{et} \quad N_{x\varphi} = 0 \quad \text{en } x = L$$

et la coque est à nouveau isostatique.

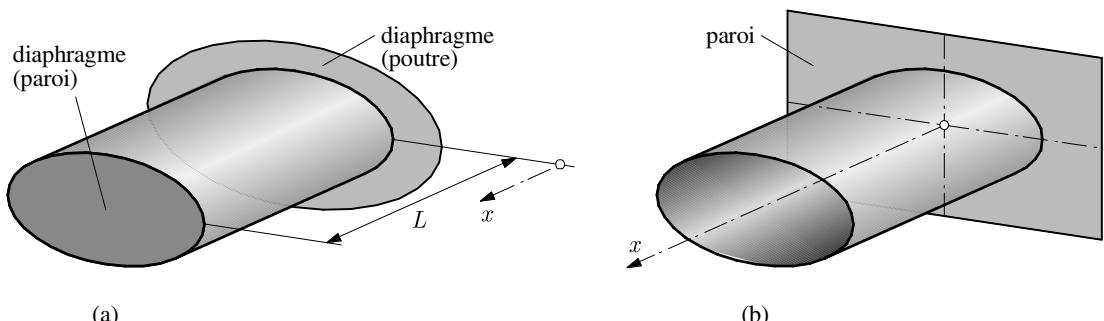


Fig. 7.6 Conditions aux limites : (a) deux diaphragmes ;
(b) diaphragme-paroi en $x = 0$ (pas de diaphragme en $x = L$).

7.5.3 Coques ouvertes

Si la coque cylindrique est *ouverte* (voûte), elle comporte des génératrices formant bords libres, mais *aucune condition statique nouvelle ne peut être introduite sur ces bords*. Or, en un tel bord, on devrait avoir

$$N_\varphi = 0 \quad N_{\varphi x} = 0 \quad (7.11)$$

La théorie membranaire ne peut satisfaire ces conditions aux limites et son application aux coques cylindriques ouvertes devient discutable.

Toutefois, la première équation (7.2) montre que $N_\varphi = 0$ là où $p_z = 0$. Cette circonstance se présente fréquemment en pratique, où les voûtes doivent essentiellement résister à des charges verticales (poids mort et neige) : on a $N_\varphi = 0$ là où la directrice a des tangentes verticales. Si c'est le long des génératrices formant bords libres, on a $N_\varphi = 0$ sur ces bords, mais, malheureusement, on ne peut ordinairement pas remplir simultanément la condition $N_{\varphi x} = 0$.

Si $N_{\varphi x}$ n'est pas nul, il faut absorber cet effort par un *raidisseur* longitudinal (fig. 7.7), qui sera soumis à l'effort normal. Mais il est techniquement impossible de n'assurer que la transmission de $N_{\varphi x}$ entre coque et raidisseur. Ce dernier est lié rigidement à la coque, de sorte que la compatibilité des déplacements est complexe et introduit des efforts flexionnels.

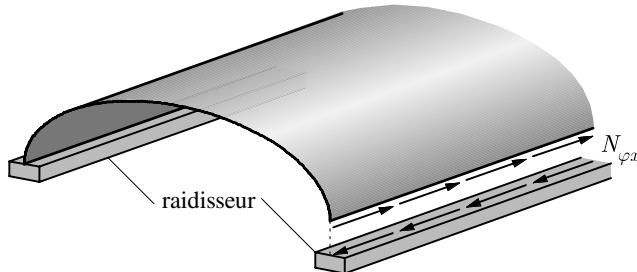


Fig. 7.7 Voûte avec raidisseurs.

On voit que, dans tous les cas de coques cylindriques *ouvertes*, la théorie membranaire est incompatible avec la présence de bords libres génératrices : il naît des efforts supplémentaires qui, le plus souvent, sont *importants* et se répercutent *dans toute la coque*. Il faut dès lors passer par la théorie flexionnelle, car la distribution des efforts membranaires est en général complètement perturbée (chap. 8).

7.6 Applications

7.6.1 Cadre

On admet que

- les charges suivent la distribution simple (7.3) avec, en plus, $p_x = 0$;
- la coque, de longueur L , est appuyée sur deux diaphragmes d'extrémité (cas isostatique).

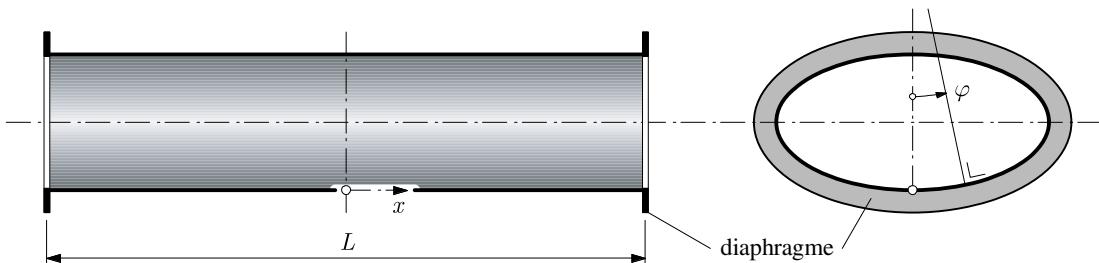


Fig. 7.8 Tuyau elliptique.

On place l'origine des x au niveau de la directrice médiane (fig. 7.8). Les conditions statiques aux limites sont

$$N_x = 0 \quad \text{en } x = -\frac{L}{2} \quad N_x = 0 \quad \text{en } x = \frac{L}{2} \quad (\text{a})$$

De plus, par symétrie par rapport au plan $x = 0$, on doit avoir

$$N_{x\varphi} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (\text{b})$$

En introduisant (b) dans (7.5), on trouve $f_1(\varphi) = 0$; puis, avec (a) dans (7.6), on obtient

$$f_2(\varphi) = -\frac{L^2}{8r} \frac{dF}{d\varphi}$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$N_\varphi = -rp_z \quad N_{x\varphi} = -xF(\varphi) \quad N_x = -\frac{1}{2r} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} \quad (7.12)$$

avec $r = r(\varphi)$ et $F(\varphi) = p_\varphi + (1/r)(dN_\varphi/d\varphi)$.

Il résulte de ces formules que $N_{x\varphi}$ et N_x varient linéairement et paraboliquement dans le sens longitudinal (génératrice : x variable et φ constant), à l'image de l'effort tranchant et du moment de flexion d'une poutre simple de portée L (fig. 7.9). Mais les diagrammes de N_x et $N_{x\varphi}$ dans la section droite (directrice : x constant et φ variable) ne sont pas à l'image de ceux des contraintes σ_x et τ dans une poutre. En plus, il apparaît un effort N_φ inexistant dans la théorie des poutres.

7.6.2 Tuyau cylindrique sous pression hydrostatique

Un tuyau, de section circulaire de rayon a , est soumis au poids et à la pression intérieure d'un liquide de masse volumique ρ ; la charge est définie par la hauteur h ($h \geq a$) entre la surface libre du liquide et l'axe du tuyau (fig. 7.9).

La charge est normale en tout point de la surface moyenne et ses composantes valent

$$p_x = 0 \quad p_\varphi = 0 \quad p_z = -\rho g(h + a \cos \varphi)$$

On en tire d'abord, dans la première équation (7.12),

$$N_\varphi = \rho g a (h + a \cos \varphi)$$

puis, par (7.4),

$$F(\varphi) = \frac{1}{a} \frac{dN_\varphi}{d\varphi} = -\rho g a \sin \varphi \implies \frac{dF}{d\varphi} = -\rho g a \cos \varphi$$

et enfin, avec les deux dernières équations (7.12),

$$N_{x\varphi} = \rho g a x \sin \varphi \quad N_x = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \rho g \cos \varphi$$

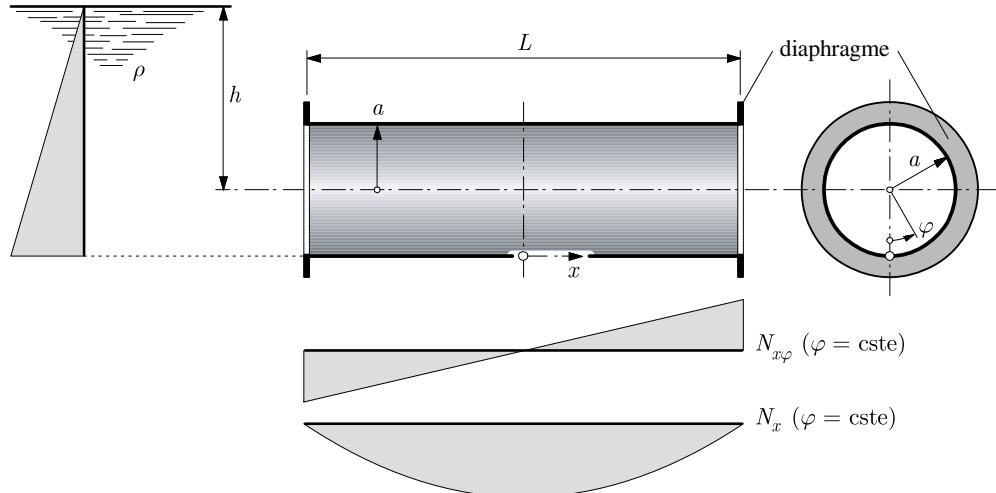


Fig. 7.9 Tuyau circulaire sous pression hydrostatique.

On constate que la pression moyenne à l'axe, ρgh , ne produit que des efforts normaux circonférentiels, obéissant à la formule du tube (TGC vol. 2, § 4.7.1). Quant à N_x et $N_{x\varphi}$, ils représentent la transmission du poids du liquide, contenu dans le tuyau, vers les diaphragmes ; si on assimile le tuyau à une poutre, on observe que N_x et $N_{x\varphi}$ sont distribués conformément aux contraintes σ_x et τ de flexion simple : $N_x = \sigma_x t$ suit la loi de Navier et $N_{x\varphi} = \tau t$ obéit à la formule de l'effort tranchant (fig. 7.10a). Cette coïncidence n'existe cependant que pour le cylindre circulaire et pour certains cas simples de mise en charge. Par exemple, si la section droite est elliptique, les diagrammes sont très différents (fig. 7.10b).

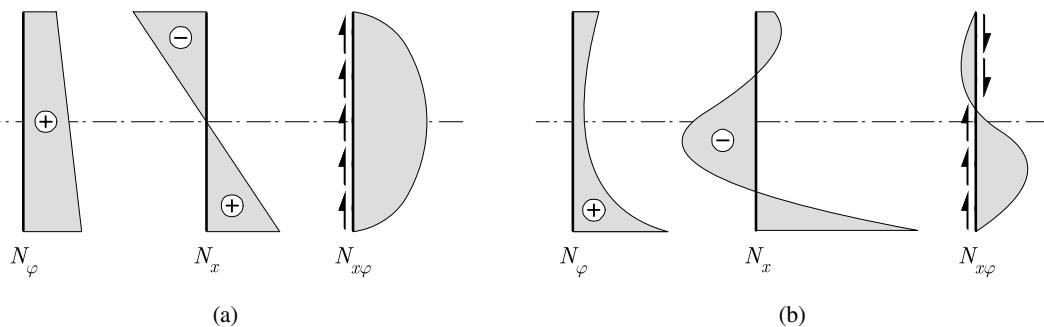


Fig. 7.10 Efforts intérieurs dans la section droite : (a) section circulaire ; (b) section elliptique (allures).

Remarques

En pratique, on ne peut réaliser les conditions aux limites de type membranaire, et il y a incompatibilité cinématique au niveau des diaphragmes (en particulier, là où $v = 0$, on a aussi $w = 0$). Des effets flexionnels de bord apparaissent. La coque étant fermée, ils ont un caractère local et la solution membranaire donne une vue globalement correcte du jeu des forces dans la coque.

Entre deux diaphragmes, une coque a l'aspect d'une poutre, mais les diagrammes des efforts intérieurs, tant transversaux que longitudinaux, peuvent différer de ceux d'une poutre. En effet, dans une poutre, on ne fait pas les mêmes hypothèses cinématiques (par exemple : loi des sections planes et indéformables, déformations dues à l'effort tranchant ignorées) que dans la coque ($v, w, \gamma_{x\varphi}$ non nuls).

7.6.3 Tuyau circulaire sous poids propre

Pour un tuyau de longueur L , de section circulaire de rayon a , d'épaisseur de paroi constante t , on appelle p le poids propre de la paroi par unité d'aire (fig. 7.11). Les composantes de la charge valent

$$p_x = 0 \quad p_\varphi = -p \sin \varphi \quad p_z = -p \cos \varphi$$

On obtient, en suivant la même démarche qu'au paragraphe 7.6.2,

$$N_\varphi = ap \cos \varphi \quad N_{x\varphi} = 2px \sin \varphi \quad N_x = \frac{p}{a} \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right) \cos \varphi$$

avec

$$F(\varphi) = -2p \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{d\varphi} = -2p \cos \varphi$$

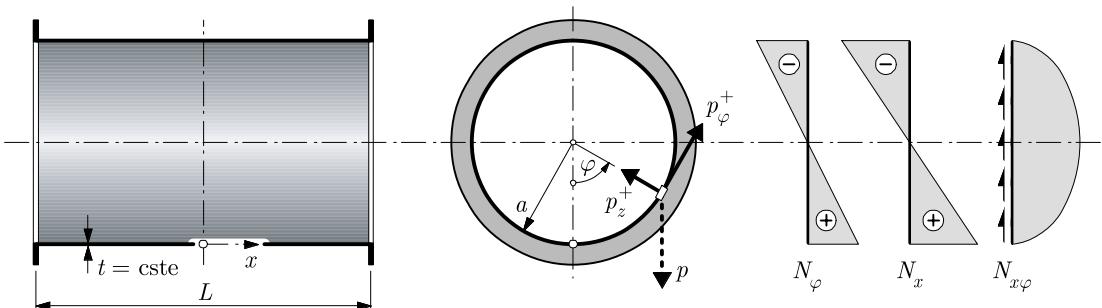


Fig. 7.11 Tuyau circulaire sous son poids propre.

7.6.4 Voûte à directrice semi-circulaire sous son poids propre

Dans l'application précédente, N_φ s'annule le long des deux génératrices $\varphi = \pm\pi/2$. Si l'on enlève la moitié inférieure de la coque, la moitié supérieure peut porter son poids propre librement entre les diaphragmes. Il subsiste cependant l'effort tangentiel $N_{\varphi x}$ ($= N_{x\varphi}$) sur les génératrices de bord (§ 7.5.3). Il vaut

$$N_{\varphi x} = \pm 2px$$

et on doit ajouter un élément raidisseur auquel transmettre cet effort (fig. 7.12). Ce raidisseur est soumis à la traction

$$N(x) = \int_x^{L/2} |N_{\varphi x}| dx = 2p \int_x^{L/2} x dx = p \left(\frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

avec, en $x = 0$, $N(x) = pL^2/4$ (valeur maximale) et, en $x = \pm L/2$, $N(x) = 0$.

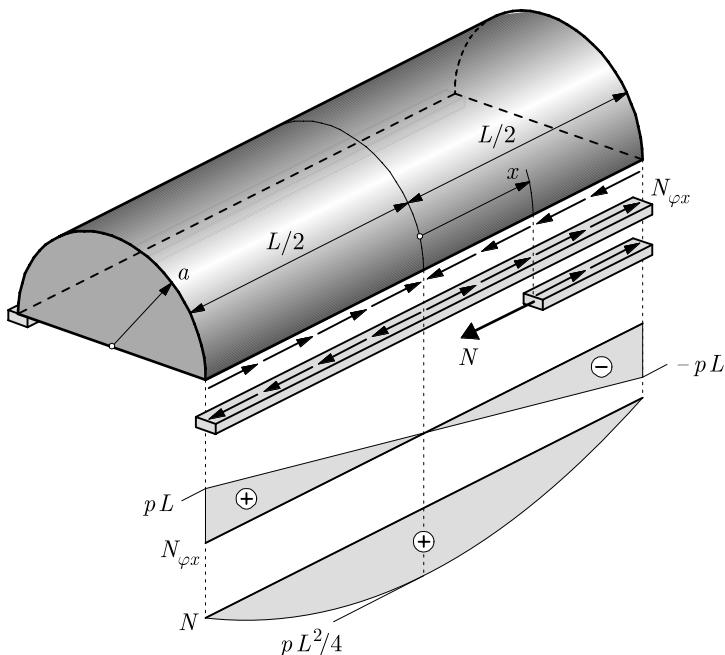


Fig. 7.12 Sollicitation des raidisseurs d'une voûte à directrice semi-circulaire.

La nécessité statique de cet effort normal est bien visible si l'on examine, en élévation, l'équilibre d'un fragment de coque limité à la section $x = \text{cste}$ (fig. 7.13). On vérifie aisément que l'équilibre global est satisfait :

- dans $\sum F_X = 0$, la paire $2N$ des efforts normaux équilibre l'intégrale des N_x ;
- dans $\sum F_Z = 0$, la somme $V + R$ équilibre le poids propre p sur $L/2 + x$;
- dans $\sum M_A = 0$, le moment des efforts N_x équilibre celui des forces R et p .

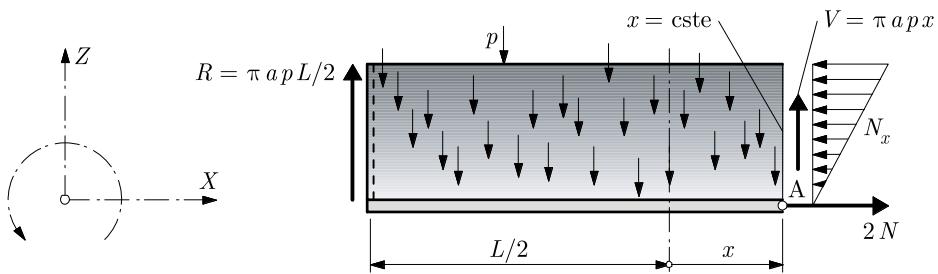


Fig. 7.13 Equilibre global d'un fragment de la voûte (R au diaphragme et V dans la coupe x sont les résultantes verticales des $N_{x\varphi}$).

7.7 Forme de la directrice d'une voûte autoportante

Comme déjà signalé, les incompatibilités cinématiques entre une voûte et ses raidisseurs peuvent perturber complètement l'état membranaire.

D'un strict point de vue membranaire, le long de la génératrice associée au raidisseur, la compatibilité doit porter sur les déplacements longitudinaux u . Or les déplacements u , produits dans les raidisseurs par l'effort $N_{\varphi x}$, ne concordent pas avec ceux des génératrices correspondantes de la coque : c'est l'incompatibilité majeure.

De plus, les raidisseurs sont, en réalité, des *poutres* liées rigidement à la coque. La compatibilité devrait donc porter sur toutes les composantes des déplacements ($u, v, w, \theta_x, \theta_\varphi$ – avec emploi de la théorie flexionnelle). Enfin, les poutres raidisseurs ont un poids propre q non négligeable et, en outre, la liaison est généralement excentrique et oblique, ce qui complique encore le problème (fig. 7.14).

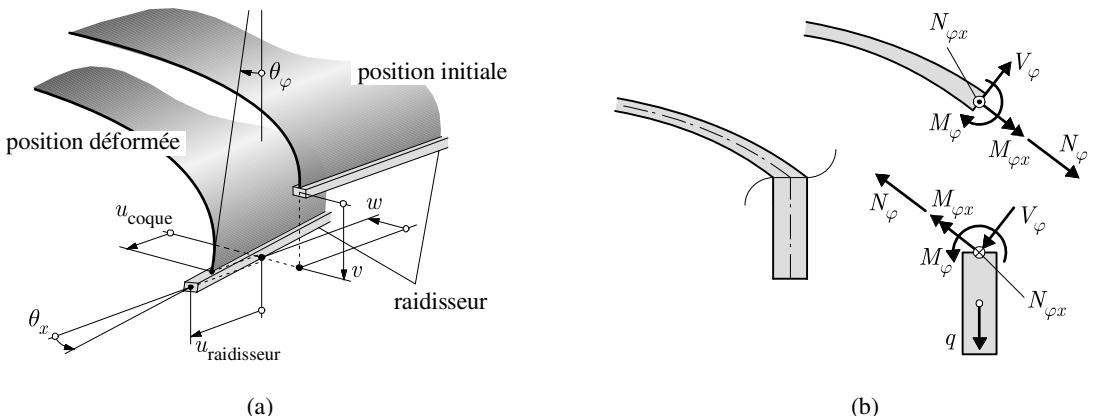


Fig. 7.14 Incompatibilité cinématique entre voûte et raidisseur : (a) incompatibilité membranaire (seul u importe) ; (b) jonction rigide (incompatibilité flexionnelle).

On peut, par un choix judicieux de la forme de la directrice, limiter dans une certaine mesure ces incompatibilités.

On sait qu'il convient d'avoir des tangentes verticales le long des bords libres, ce qui évite les efforts N_φ sous charges verticales (§ 7.5.3). La présence de ces efforts signifie que la coque ne souhaite pas transmettre ses charges aux seuls diaphragmes, *longitudinalement*, par *effet de poutre*, mais aussi à des raidisseurs, *transversalement*, par *effet d'arc*. Pour limiter ce second mode de travail, le choix de *directrices cambrées aux naissances*, de type demi-ellipse, est judicieux (fig. 7.15). Au contraire, le choix d'une parabole ou d'une chaînette est mauvais, puisque les actions verticales (neige, poids mort) sont essentiellement transmises en N_φ aux poutres raidisseurs par effet d'arc, sans qu'aucun effet longitudinal de poutre ne puisse se développer convenablement ($N_x \cong 0$; $N_{x\varphi} \cong 0$).

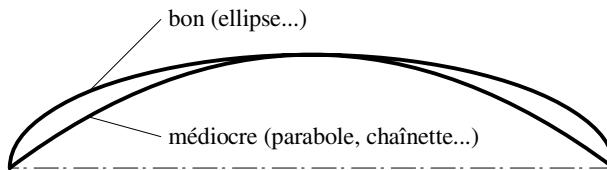


Fig. 7.15 Choix d'une directrice.

Quant à la non-concordance entre les déplacements u , on peut tenter, pour la limiter, de choisir comme directrices des courbes qui, sous charges verticales, assurent $N_x > 0$ aux bords libres rectilignes (fig. 7.16), voire qui approchent la compatibilité entre bord et raidisseur (supposé sans excentricité et sans poids). Dans cette optique, on observe que des courbes cambrées aux naissances sont, à nouveau, meilleures.

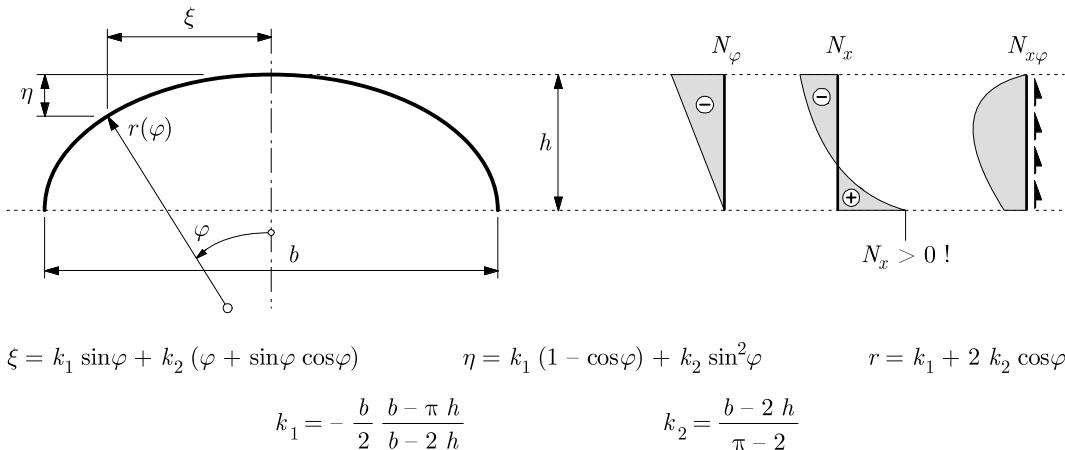


Fig. 7.16 Directrice pour laquelle les génératrices bords libres sont en traction (sous poids propre).

7.8 Conclusion

La théorie membranaire des coques cylindriques autoportantes est, d'un point de vue quantitatif, de peu d'utilité. Elles ne donne des résultats valables que pour les coques fermées, en dehors des zones d'appui. Pour les voûtes, seuls les résultats qualitatifs sont intéressants.

7.9 Exercices

7.9.1 Étudier les conditions aux limites des trois coques proposées (fig. Ex. 7.9.1) et dire si elles sont isostatiques ou non (d = diaphragme).

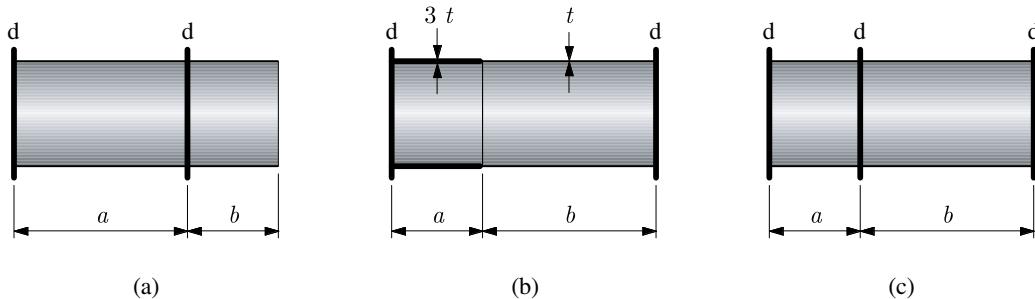


Fig. Ex. 7.9.1

7.9.2 Déduire les équations (7.1), (7.7), (7.8) et (7.9) de la théorie membranaire des coques cylindriques, à partir des équations de la théorie générale (sect. 3.2).

7.9.3 Un réservoir cylindrique, encastré à sa base et ouvert en son sommet, est soumis au seul cas de charge du vent (réservoir vide ; poids propre non considéré ; fig. Ex. 7.9.3). Pour simplifier, on admet que la pression du vent s'exerce normalement à la paroi, est constante longitudinalement sur la hauteur h du réservoir, et agit selon la loi $p \cos \varphi$ transversalement.

1) Calculer les efforts membranaires qui naissent dans la coque ; les représenter graphiquement

- le long d'une génératrice $\varphi = \text{cste}$;
- dans la section de base.

Note : les calculs sont plus simples en prenant l'origine des x au bord libre.

2) Dans quelle zone de la coque la théorie membranaire peut-elle s'avérer insuffisante ?

3) Donner, à la base, les conditions d'appui

- en théorie membranaire ;
- en théorie flexionnelle.

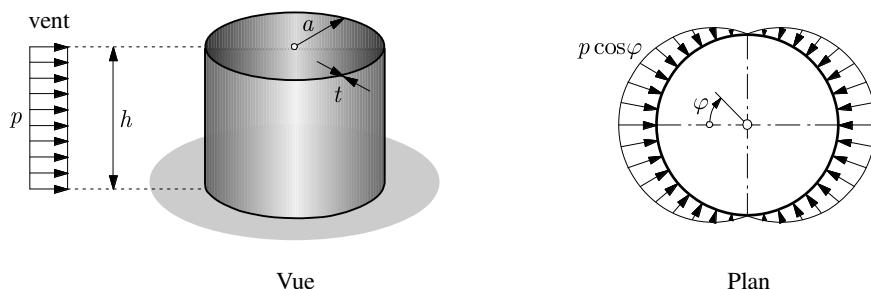


Fig. Ex. 7.9.3

7.9.4 Un avant-toit en console est une voûte cylindrique autoportante, à directrice semi-circulaire et soumise à la seule charge uniforme de neige p (définie par m^2 horizontal ; fig. Ex. 7.9.4).

- 1) Calculer la répartition des efforts intérieurs membranaires dans toute la coque.

Note : les calculs sont simplifiés avec l'origine des x à l'extrémité libre.

- 2) Représenter graphiquement (en élévation) ces efforts dans la section d'encastrement ; commenter ces diagrammes.

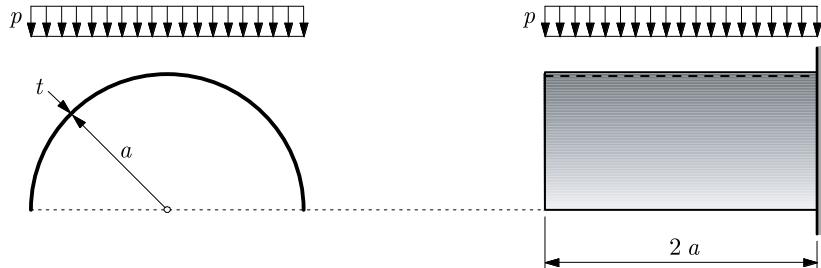


Fig. Ex. 7.9.4

7.9.5 On couvre une surface carrée de 144 m^2 avec une voûte à directrice parabolique. On envisage deux cas de charge : poids propre p et neige q (fig. Ex. 7.9.5).

- 1) Ecrire l'équation de la directrice, puis celle de son rayon de courbure $r(\varphi)$.
- 2) Calculer les efforts intérieurs dus au poids propre.
- 3) Calculer les efforts intérieurs dus à la neige.
- 4) Commenter et conclure.

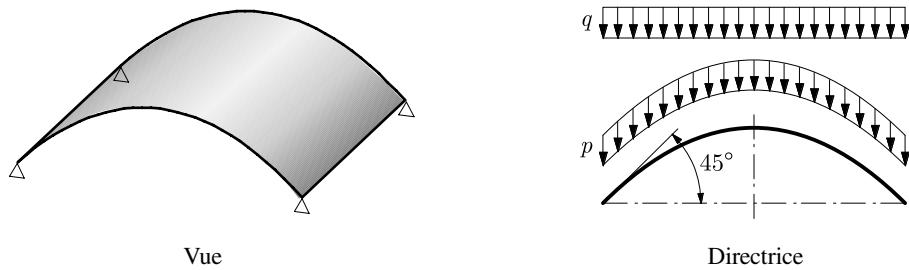


Fig. Ex. 7.9.5

8 Coques cylindriques

Théorie flexionnelle

8.1 Introduction

Les insuffisances de la théorie membranaire ont obligé les ingénieurs à se tourner vers la théorie flexionnelle. L'intérêt de cette théorie est flagrant face à l'emploi considérable de ce type de coques en structures (couvertures et toitures ; conduites et réservoirs ; fuselages ; coques de navires et sous-marins ; etc.).

C'est surtout dans les années 1935-1950 que la théorie flexionnelle s'est développée. Les plus grands ingénieurs et scientifiques y ont contribué (Donnell, Kempner, Schorer, Hoff, Parme, Aas-Jakobsen, Reissner, Flügge, Finsterwalder, Dischinger, Zerna, Gibson, Jenkins, Torroja, Novozhilov, Lure, Mushtari, Vlassov, von Karman...). Moyennant certaines simplifications (sect. 8.3), il est possible de résoudre le système d'équations pour isoler le déplacement transversal w dans une équation différentielle du huitième ordre, peut-être l'équation la plus célèbre de la théorie des coques minces (équation parfois dite de Donnell, Vlassov, Jenkins, 1933-1947).

Aujourd'hui toutefois, ces développements théoriques ont perdu quasiment tout intérêt. Les méthodes numériques générales ont supplanté les théories particulières.

8.2 Équations de la théorie flexionnelle

8.2.1 Coordonnées

Il est plus rationnel de déduire les équations nécessaires des équations générales de la théorie des coques (chap. 2), que de les établir directement. En accord avec la figure 7.1, on prend pour coordonnées curvilignes (α, β) les coordonnées (x, φ) des lignes de courbure. On a, où A et B sont les paramètres de Lamé,

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv x & A &= 1 & r_\alpha &= \infty \\ \beta &\equiv \varphi & B &= r & r_\beta &= r\end{aligned}$$

avec $ds = r d\varphi$ (d'où B), et

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0$$

8.2.2 Equations d'équilibre

A partir de (2.42) à (2.46), on obtient aisément

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_\varphi + p_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} N_\varphi + p_z &= 0 \\ \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - V_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - V_x &= 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

avec $N_{\varphi x} = N_{x\varphi}$ et $M_{\varphi x} = M_{x\varphi}$.

8.2.3 Cinématique

Les équations (2.26) deviennent

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right) \quad \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.2)$$

$$c_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad c_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} \quad c = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial x} \quad (8.3)$$

où les rotations sont données, via (2.13), par

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \theta_\varphi = \frac{1}{r} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (8.4)$$

Avec ces valeurs, les variations de courbure cinématique deviennent

$$c_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad c_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right) \quad c = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \quad (8.5)$$

8.2.4 Loi constitutive

Comme d'habitude, par (2.51),

$$\begin{aligned} N_x &= C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) & N_\varphi &= C(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) \\ N_{x\varphi} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma = G t \gamma & & \\ M_x &= D(\psi_x + \nu \psi_\varphi) & M_\varphi &= D(\psi_\varphi + \nu \psi_x) \\ M_{x\varphi} &= D \frac{1-\nu}{2} \chi = G \frac{t^3}{12} \chi \end{aligned} \quad (8.6)$$

avec (2.53) $\psi_x = -c_x$, $\psi_\varphi = -c_\varphi$ et $\chi = -c$.

8.2.5 Bilan et conditions aux limites

On dispose de dix-sept équations (8.1), (8.2), (8.5) et (8.6) pour dix-sept inconnues. Mais, malgré la simplification apportée par la forme cylindrique de la surface moyenne de la coque, on ne peut faire mieux que d'aboutir à trois équations aux dérivées partielles, couplées, liant u , v et w (sect. 2.9).

Les conditions aux limites sont celles générales (§ 2.10.2). Elles sont au nombre de quatre par bord :

- directrice

$$N_x, \quad N_{x\varphi}^*, \quad V_x^*, \quad M_x \quad u, \quad v, \quad w, \quad \theta_x \quad (8.7)$$

- génératrice

$$N_\varphi, \quad N_{\varphi x}^*, \quad V_\varphi^*, \quad M_\varphi \quad u, \quad v, \quad w, \quad \theta_\varphi \quad (8.8)$$

Remarque

La figure 8.1 montre un élément de coque isolé, sur lequel sont portés les efforts intérieurs flexionnels seuls ; il s'y superpose les efforts membranaires et les charges, selon la figure 7.3. Il est aisé, à partir de ces figures, d'établir les équations d'équilibre directement. On note que l'effort tranchant $V_\varphi dx$ a une composante d'intensité $V_\varphi dx d\varphi$ selon \mathbf{b} .

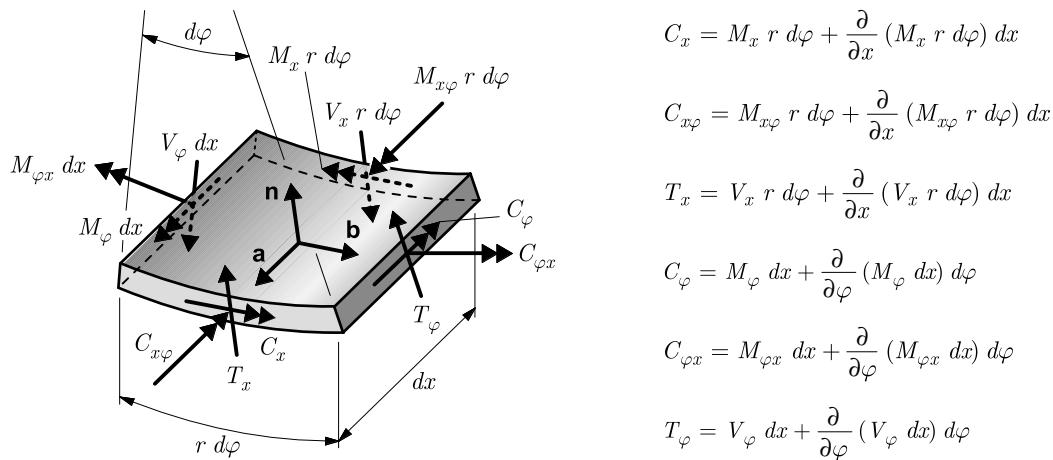


Fig. 8.1 Efforts intérieurs flexionnels.
(Les efforts membranaires et les charges sont donnés à la figure 7.3.)

8.3 Calcul d'une coque cylindrique

Vu l'intérêt pratique, les ingénieurs ont cherché des simplifications raisonnables pour résoudre les dix-sept équations. En supposant la directrice circulaire ($r = a = \text{cste}$) et la coque surbaissée selon Donnell (sect. 3.4.3), les variations de courbure se simplifient en

$$c_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad c_\varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \quad c = \frac{2}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}$$

ce qui permet d'aboutir à une seule équation différentielle du huitième ordre, ne contenant que le déplacement transversal w .

L'utilisation pratique de cette équation reste néanmoins excessivement laborieuse. Certains chercheurs ont dressé des tables numériques pour alléger les calculs ; d'autres ont tenté de simplifier davantage les équations afin d'obtenir des résultats encore suffisamment précis (Schorer 1935). Mais les méthodes obtenues restent d'emploi trop complexe. De plus, elles ne s'appliquent qu'aux coques à directrice circulaire, à épaisseur constante et, presque toujours, à simple portée. Enfin, les diaphragmes sont supposés infiniment rigides dans leur plan et totalement souples hors de leur plan, ce qui ne correspond pas à la réalité.

Aujourd'hui, pour obtenir les efforts intérieurs et déplacements d'une coque cylindrique quelconque avec une certaine précision et confiance, *il faut effectuer un calcul numérique par la méthode des éléments finis* (chap. 11). Diaphragmes, raidisseurs, variations d'épaisseur, forme arbitraire de la directrice, appuis divers, continuités, trous, poutres de bord, variations de température, tassements d'appui, précontrainte, etc., sont pris en compte sans difficulté par les programmes actuels.

8.4 Voûtes autoportantes

La voûte autoportante (ou coque cylindrique ouverte) est d'usage courant comme couverture.

En coupe (plan de la directrice), la forme de la directrice est *a priori* quelconque (arc de cercle, ellipse, forme en shed, etc.). Les naissances peuvent être renforcées, par exemple épaissees ou, éventuellement, munies de raidisseurs. Enfin, la voûte peut être *simple* ou *multiple* (fig. 8.2).

En long, la voûte est *à simple portée* et limitée par deux diaphragmes, ou *continue* et supportée par une succession de diaphragmes. La voûte s'appuie sur ses diaphragmes qui, à leur tour, prennent appui sur les murs et colonnes de la construction.

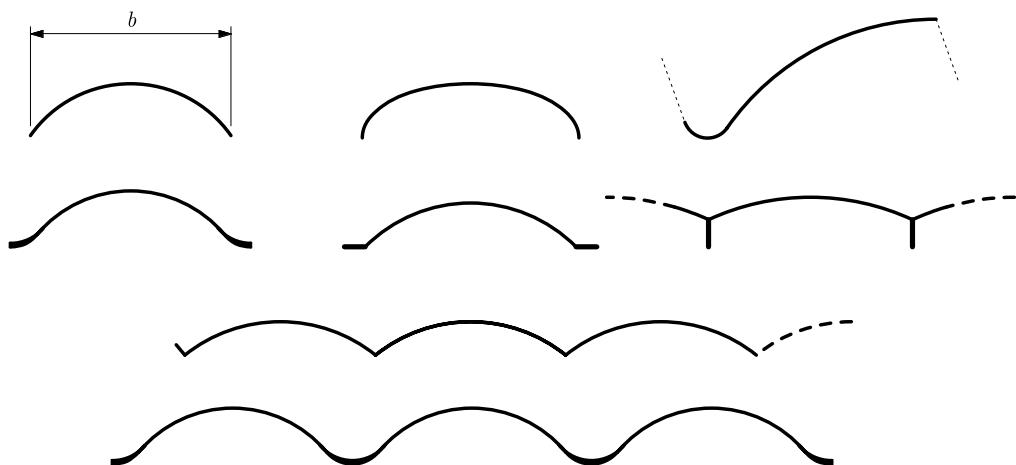


Fig. 8.2 Directrices de voûtes autoportantes.

Pour mettre en évidence quelques caractéristiques du comportement de ces structures, on se limite désormais à l'étude de la voûte simple, à directrice symétrique par rapport à un axe vertical, à simple portée et soumise à des charges verticales désignées par p . On appelle L la portée longitudinale et b la portée transversale (fig. 8.2). Certaines simplifications peuvent apparaître selon la valeur du rapport L/b .

L'incapacité de la théorie membranaire à satisfaire aux conditions aux limites statiques sur les génératrices bords libres (§ 7.5.3) oblige la coque à développer un comportement flexionnel. Cet état est d'autant plus marqué que le rapport L/b s'accroît. Lorsque L/b est *grand* (L multiple de b), la coque travaille selon la théorie flexionnelle et l'état membranaire est sans valeur (fig. 8.3a) ; on peut calculer approximativement la répartition des efforts intérieurs par la *méthode de la poutre* (sect. 8.5). Quand L/b est *petit* ($L \approx b$), les efforts flexionnels s'atténuent dans la zone centrale de la coque (loin des bords libres) ; dans cette zone, la théorie membranaire donne une idée des efforts intérieurs, mais cela n'aide guère pour le dimensionnement (fig. 8.3b).

Il existe de plus, dans tous les cas, des effets flexionnels de bord dus aux diaphragmes d'appui (fig. 8.3).

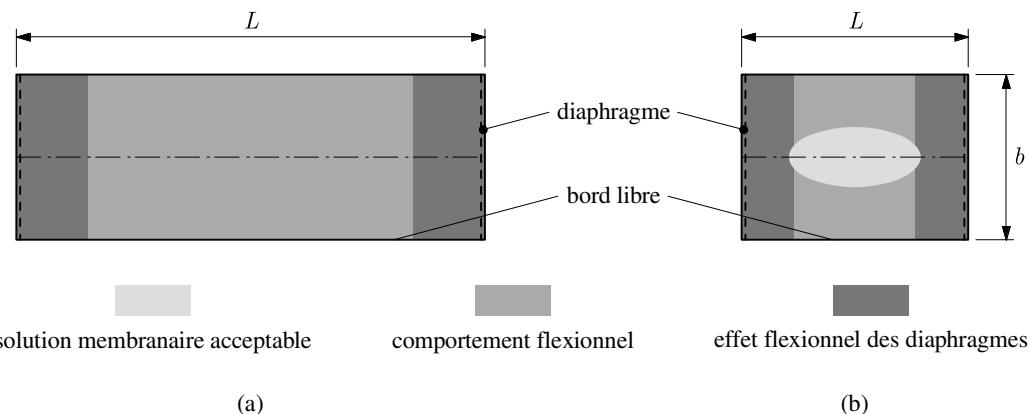


Fig. 8.3 Comportement structural schématique d'une voûte simple (vues en plan) :
(a) voûte longue ; (b) voûte courte.

La limite entre coques *longues* et *courtes* reste toutefois assez difficile à fixer. De plus, la présence éventuelle de raidisseurs longitudinaux peut perturber les conclusions qualitatives précédentes (sect. 8.6).

8.5 Voûtes longues – Méthode de la poutre

8.5.1 Hypothèses

La *méthode de la poutre*, développée par Lundgren (dès 1945), propose une analyse de la coque autoportante par une double approche en poutres (fig. 8.4). Dans le sens longitudinal, on considère que la coque travaille globalement comme une poutre à appuis simples ; la section droite est à paroi

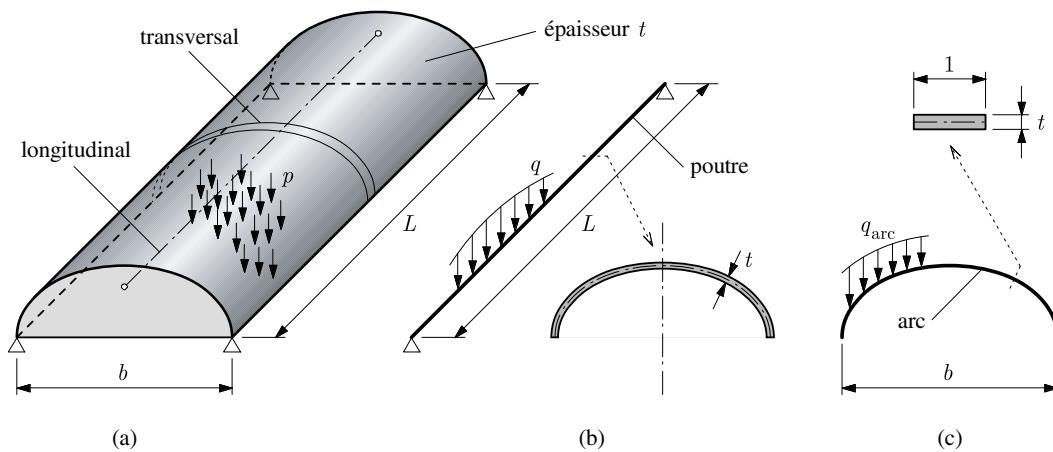


Fig. 8.4 Méthode de la poutre : (a) coque autoportante ; (b) poutre longitudinale et sa section droite ; (c) arc (ou poutre transversale) et sa section droite.

mince (épaisseur t) et la directrice en est la ligne moyenne. Transversalement, la méthode découpe la voûte en tranches, par des sections normales contenant la directrice ; chaque tranche est analysée comme une poutre courbe, dite *arc*, à section rectangulaire (largeur 1 , hauteur t).

L'hypothèse essentielle est que *la voûte est assimilable à une poutre de Bernoulli*. Cette hypothèse est surtout importante dans le sens longitudinal, où il faut que la portée L soit nettement plus grande que la dimension transversale b de la section droite. Dans le sens transversal, les arcs sont toujours élancés.

Il en résulte les conséquences suivantes :

- les sections droites restent planes (loi de Bernoulli) et sont indéformables ; en particulier, il n'y a pas de gauchissement par déformation d'effort tranchant ; pour la poutre, dont la section droite peut être à paroi très mince, cette approximation est le point le plus sensible de la méthode ;
- dans le sens longitudinal, la poutre est sollicitée en flexion simple ; dans la section droite, le moment fléchissant M et l'effort tranchant V provoquent des contraintes normales σ_x et tangentielles τ ; vu la minceur de la coque, on admet que ces contraintes sont *constantes à travers l'épaisseur t* (hypothèse usuelle pour τ) ;
- dans la coque, σ_x s'associe à N_x ($\sigma_x = N_x/t$) et τ à $N_{x\varphi}$ ($\tau = N_{x\varphi}/t$) ; longitudinalement, l'hypothèse de poutre ne peut donc représenter les autres efforts intérieurs et on doit supposer qu'ils sont négligeables

$$M_x \cong 0 \quad M_{x\varphi} = M_{\varphi x} \cong 0 \quad V_x \cong 0$$

cela revient à admettre que la section droite est ramenée sur la ligne moyenne, ou encore que la coque ne travaille qu'en membrane ;

- dans le sens transversal, la section droite de l'arc est identique à celle de la coque ; cette section peut reprendre les efforts intérieurs N_φ , M_φ et V_φ (flexion simple composée).

8.5.2 Calcul de la poutre

Longitudinalement, on réduit les charges de surface p sollicitant la coque à une charge q [N/m] équivalente, répartie sur l'axe de la poutre. Il en découle les diagrammes du moment de flexion M et de l'effort tranchant V de poutre. Dans la section droite, on calcule les propriétés géométriques nécessaires (centre géométrique G , axes principaux y et z , inertie I_y , etc. ; fig. 8.5).

Par la formule de Navier, on obtient

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} z$$

où z est mesuré à la ligne moyenne ; on en tire

$$N_x = t\sigma_x \quad (8.9)$$

Puis, par la formule de l'effort rasant, on a directement (flux)

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = \frac{VS}{I_y} \quad (8.10)$$

où S est le moment statique utile (TGC vol. 2, chap. 9).

Remarque

Les conventions de signe dans la poutre sont les mêmes que dans la coque (TGC vol. 6, § 1.3.3). Les axes (x, y, z) de la poutre sont parallèles aux axes (X, Y, Z) de la coque (fig. 7.1).

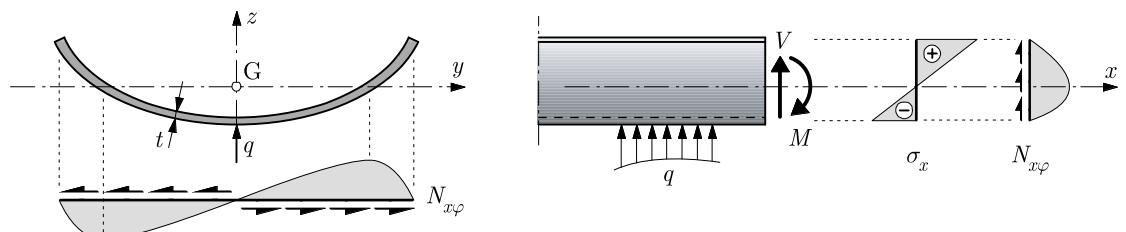


Fig. 8.5 Efforts de poutre (axes (x, y, z) de la poutre par G).

8.5.3 Efforts d'arc

Par deux coupes transversales, on isole une tranche de voûte de largeur Δx (fig. 8.6a). L'équilibre vertical de ce fragment est assuré par la différence des efforts tangentiels $\Delta N_{x\varphi}$ sur les deux coupes d'une part, et par les charges réparties sur la surface moyenne de la tranche d'autre part. (Les efforts N_x et $N_x + \Delta N_x$ n'interviennent pas dans l'équilibre vertical et ne sont pas représentés sur la figure.)

On a

$$\Delta N_{x\varphi} = \Delta V \frac{S}{I_y}$$

Or, longitudinalement, l'effort tranchant V et la charge q sont liés par l'équation d'équilibre $\Delta V = -q \Delta x$ (TGC vol. 1, § 9.2.1), d'où

$$\Delta N_{x\varphi} = -q \frac{S}{I_y} \Delta x$$

La tranche de voûte est alors calculée comme une *poutre en arc*, de section rectangulaire de hauteur t et de largeur $\Delta x = 1$, soumise aux deux actions suivantes :

- la force répartie tangentielle s_{arc} [N/m], tirée de l'équation précédente en posant $\Delta x = 1$,

$$s_{\text{arc}} = -q \frac{S}{I_y} \quad (8.11)$$

- la charge répartie q_{arc} , obtenue à partir des charges superficielles sollicitant la coque ($q_{\text{arc}} = p \Delta x = p \times 1$).

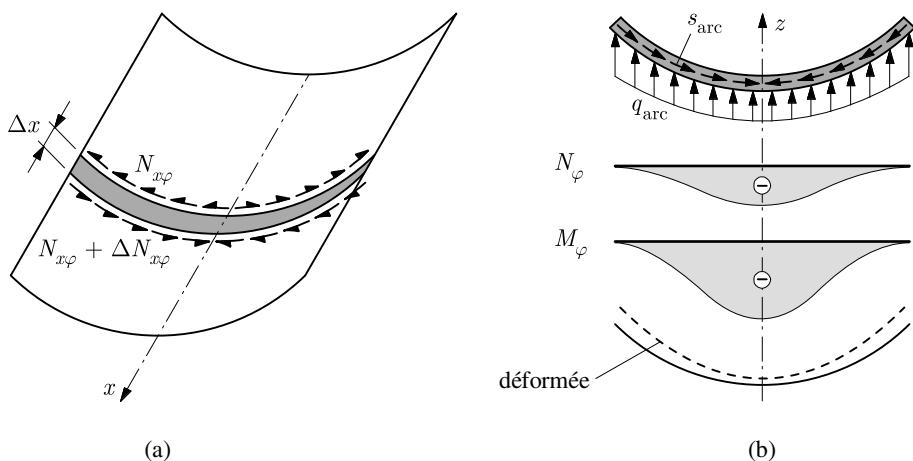


Fig. 8.6 Calcul en arc : (a) forces tangentielles (flux) agissant sur les coupes isolant l'arc ; (b) forces, efforts intérieurs et déformée de l'arc.

A partir de ces deux charges – qui se font équilibre – on calcule, dans l'arc, les diagrammes M_{φ} , N_{φ} et, éventuellement, V_{φ} . La figure 8.6(b) donne, pour la charge indiquée, l'allure de M_{φ} et N_{φ} . Le calcul de M_{φ} appelle les commentaires suivants :

- c'est un effort important, déterminant pour le dimensionnement ;
- calculé comme présenté ci-dessus (méthode de la poutre), il est surestimé ;
- il provoque (pour le cas de charge indiqué) une augmentation de la courbure transversale : *l'arc tend à se fermer* ; cette déformée transversale de la section droite se superpose à la déformée longitudinale de la poutre.

Si le calcul des efforts d'arc est simple dans son principe, il reste néanmoins laborieux dans son application, car la force s_{arc} n'est pas aisée à manipuler (il faut intégrer numériquement). On donne en annexe à ce chapitre, dans le cas de la directrice circulaire, quelques formules simplifiant les calculs.

Relativement à la *forme de la directrice*, on observe que *plus cette forme est arquée aux naissances, plus le moment M_{φ} s'atténue*. La conclusion est donc semblable à celle de la théorie membranaire, bien que pour une raison différente (sect. 7.7).

8.5.4 Domaine d'application

Le domaine des *voûtes longues*, dans lequel la méthode de la poutre s'applique sûrement, semble difficile à délimiter clairement. Il faut donc toujours considérer la méthode de la poutre avec prudence : elle permet le prédimensionnement, illustre en gros le jeu des efforts intérieurs, néglige l'effet des diaphragmes et doit être complétée d'un calcul plus précis.

A titre d'*ordre de grandeur*, voici la limite d'application proposée par divers auteurs : en appellant a le rayon de la directrice, si elle est circulaire, et s sa longueur curviligne, la voûte est longue lorsque

$$\frac{L}{a} > \pi \quad \frac{L}{s} > 2 \quad \frac{\sqrt[4]{L^2 a t}}{s} > \frac{1}{3} \quad (8.12)$$

La première relation est de Lundgren, la seconde de Kirchner et la troisième de Rabich.

8.5.5 Avantages et inconvénients

La méthode, présentée pour une coque à directrice symétrique et soumise à des charges verticales, peut s'étendre au cas de charges réparties de façon quelconque sur une voûte de directrice arbitraire. Il faut d'ailleurs, si nécessaire, tenir compte de la torsion. On peut également traiter, approximativement, les voûtes continues comme des poutres continues.

Lundgren a aussi mis au point une méthode itérative qui améliore progressivement les résultats de la méthode de la poutre et fournit finalement des valeurs fort satisfaisantes. Toutefois, à ce stade, on ne peut plus parler de méthode simplifiée.

La méthode de la poutre se complique rapidement lorsque la voûte n'est plus simple. Dans le cas de voûtes multiples, ou de voûtes liées à d'autres éléments structuraux, des efforts de liaison longitudinaux apparaissent, qu'on peut prendre en compte en tant qu'inconnues hyperstatiques par exemple. Mais le bénéfice de la simplicité disparaît.

Un inconvénient sérieux de la méthode est la difficulté à déterminer a priori si une coque est suffisamment longue pour être étudiée de cette façon. De même, il faut être prudent sur les effets des déformations dues aux contraintes tangentielles membranaires. (Ce point est illustré à la section 8.6.) Enfin, la méthode peut sous-estimer considérablement les déplacements.

8.6 Voûtes raidies

La présence de raidisseurs longitudinaux, placés aux naissances des directrices, peut modifier fortement le mode de travail de la coque elle-même. Ces poutres, de section relativement massive par rapport à l'épaisseur de la coque, attirent à elles les efforts intérieurs.

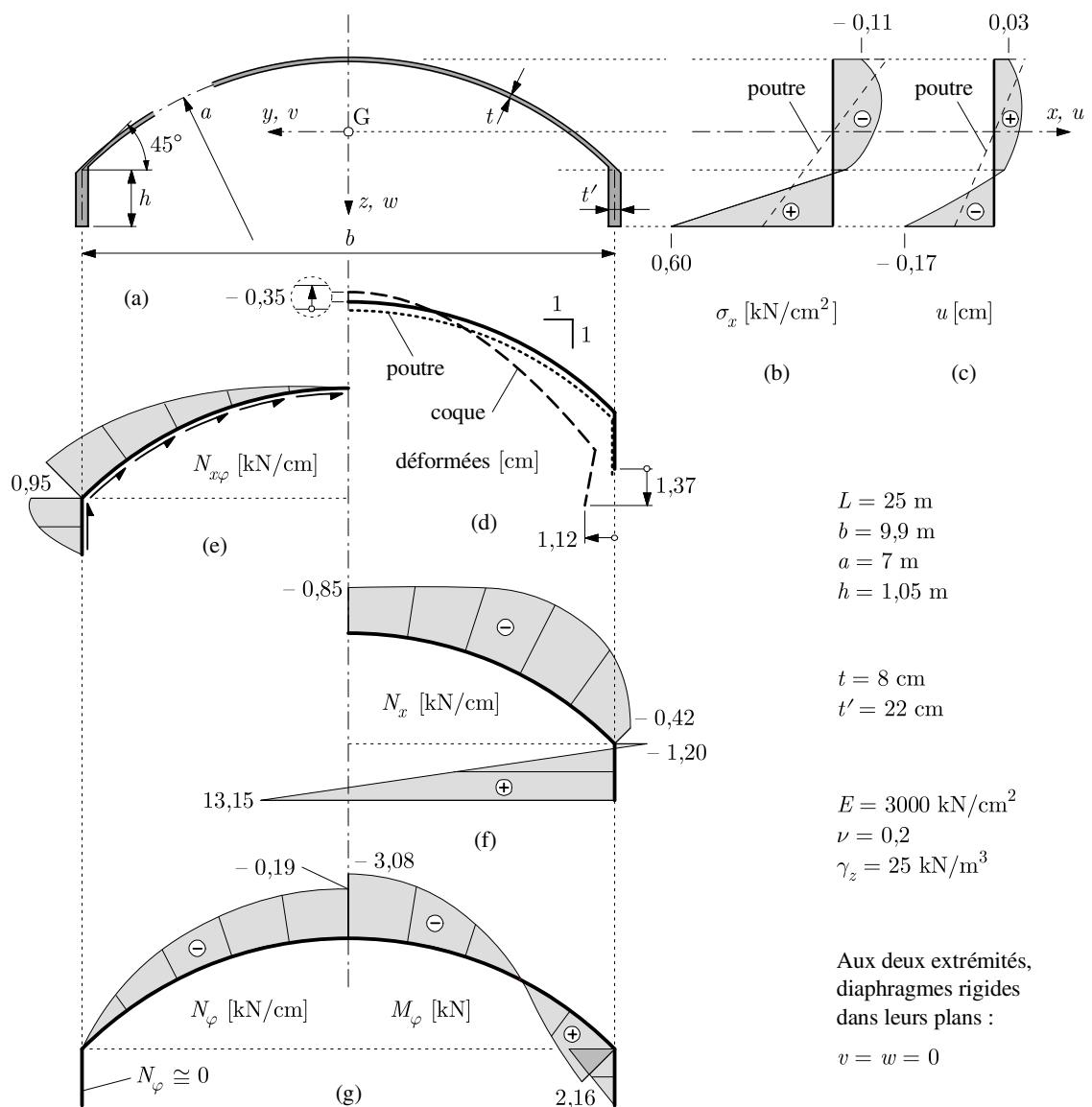


Fig. 8.7 Efforts intérieurs dans une voûte raidie sous poids propre (les raidisseurs sont modélisés en coque) : (a) géométrie (coupe) ; (b) contraintes normales longitudinales dans la section centrale ($x = L/2$) ; (c) déplacements u sur appui (gauchissement) ; (d) déformée de la section centrale (pour comparaison : $w_{\text{poutre}} = 0,32$ cm) ; (e) $N_{x\varphi}$ sur appui ; (f) N_x au centre (échelles différentes dans la coque et dans le raidisseur ; comparer avec la figure b) ; (g) N_φ et M_φ au centre.
(Calcul par éléments finis via le code FELINA, LSC, EPFL.)

Considérons le cas d'une voûte simple, à simple portée, raidie par deux poutres disposées dans des plans verticaux (fig. 8.7).

Cette disposition revient, en quelque sorte, à augmenter la cambrure (et la longueur) de la directrice aux naissances ; le moment M_φ en clé est donc atténué ; mais, vu l'encastrement de la voûte dans la poutre, ce moment change de signe et est loin d'être nul aux naissances. Le calcul de ce moment par la poutre en arc n'est plus guère possible.

Chose a priori curieuse, même le calcul des efforts longitudinaux de poutre est fortement perturbé en présence de raidisseurs. La figure montre clairement que la répartition de σ_x n'est pas linéaire, loin de là, ce qui est imputable aux déformations dues aux efforts tangentiels $N_{x\varphi}$: la section droite ne reste pas plane (gauchissement). Dans cette structure, la rigidité des poutres raidisseurs l'emporte sur celle de la coque ; cette dernière sert d'aile large aux poutres et on observe, dans ces ailes, du traînage de cisaillement (*shear lag*), ce qui en diminue l'efficacité.

En conclusion, la souplesse de la coque est fortement perturbée par la rigidité des raidisseurs : cette conception est maladroite et devrait être évitée. Il vaut mieux supprimer les raidisseurs et épaisser progressivement la coque à ses naissances.

De plus, il devient encore plus difficile de définir une limite de validité de la méthode de la poutre. Il est probable qu'avec $L/s > 5$, où s inclut la hauteur des poutres de raidissement, on soit du côté des coques longues.

8.7 Précontrainte

Les coques en béton se prêtent bien à la mise en précontrainte. Cette dernière combat la fissuration des zones tendues, ce qui améliore le comportement du béton et garantit l'étanchéité. Elle permet d'adoucir les discordances de déformation qui peuvent se produire, par exemple, entre la voûte et ses raidisseurs. Elle permet des portées plus grandes et une réduction du poids mort. Dans certains cas, on réalise des coques complètes au moyen d'éléments préfabriqués, assemblés ensuite par précontrainte (exemple 8.1 ci-après).

Dans les premières voûtes autoportantes précontraintes, on a tout naturellement placé les câbles dans les poutres raidisseurs. Ce système présente deux inconvénients :

- comme les poutres sont de faible hauteur, il n'est guère possible de donner une courbure aux câbles ; ils restent quasi rectilignes et réalisent une précontrainte presque uniforme des poutres ;
- lors de la mise en précontrainte, les poutres se raccourcissent et entraînent la coque dans leur raccourcissement ; il en résulte d'importantes contraintes tangentielles à la jonction poutre-coque, d'où un ferrailage très dense.

On a alors introduit la précontrainte dans la coque elle-même ; en utilisant des câbles courbes, on obtient un double effet :

- les efforts d'extrémité introduisent des compressions directement dans la coque ;
- les efforts de courbure portent tout ou partie du poids mort et des charges.

Toutefois, outre la composante utile P_1 , il existe, vu que le tracé du câble est gauche, une composante P_2 d'effet défavorable, car elle tend à aplatiser la coque. Pour l'éliminer, on peut épaisser les

naissances de façon à ce que le câble soit à peu près situé dans un plan. Si la précontrainte est telle que la coque est portée par les câbles, les poutres raidisseurs n'ont plus d'utilité et doivent être supprimées (fig. 8.8).

Cependant, la difficulté technique de placer un grand nombre de câbles dans une coque mince amène parfois les constructeurs à une solution mixte : des câbles dans la voûte et d'autres dans les poutres de raidissement.

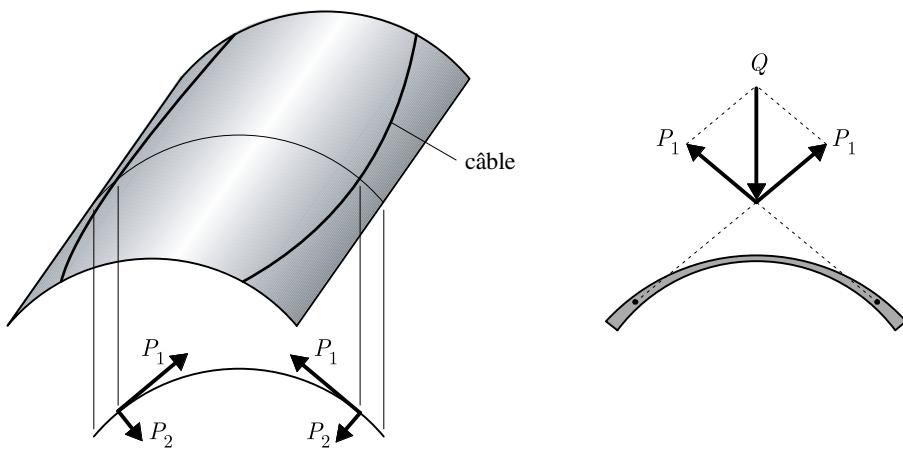


Fig. 8.8 Précontrainte.

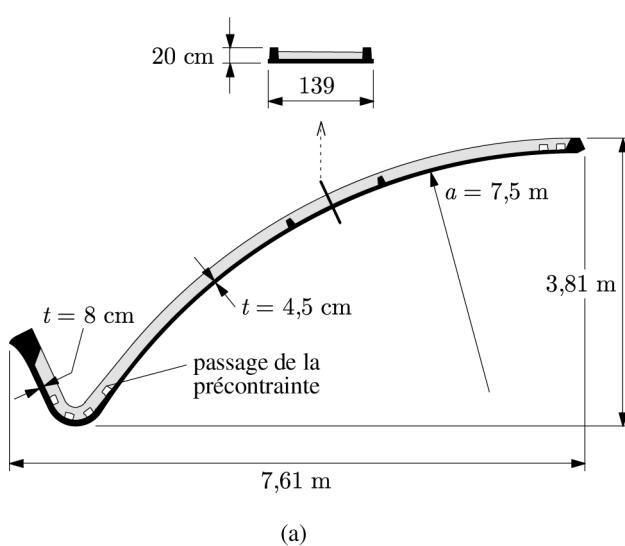
Exemple 8.1

La halle principale de la chaîne des magasins COOP, à Wangen (Suisse), est couverte par des voûtes autoportantes en shed à simple portée (fig. 8.9 ; $L = 25,2$ m ; $b \cong 7,3$ m ; $t = 4,5$ à 8 cm). La coque est formée de dix-huit éléments préfabriqués en béton assemblés par précontrainte. Les câbles, extérieurs, sont guidés par les ouvertures pratiquées dans les nervures transversales. La précontrainte est choisie – très habilement – de manière à équilibrer le poids mort. (Source : H. Hossdorf, *Vorfabrizierte Schalenshedkonstruktion für den VSK in Wangen bei Olten*, Schweizerische Bauzeitung, Heft 50, 13.XII.1962.)

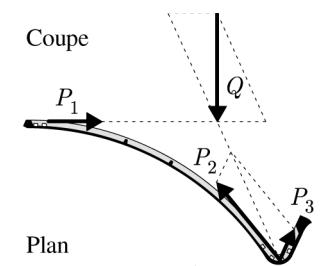
8.8 Exercices

8.8.1 Une voûte cylindrique autoportante, à simple portée ($L = 20$ m), d'épaisseur constante ($t = 8$ cm), de directrice circulaire ($a = 6$ m et $\varphi_0 = 40^\circ$), est construite en béton (fig. Ex. 8.8.1a). Elle est soumise à son poids propre (25 kN/m^3) et à une charge verticale uniformément répartie sur la surface moyenne (1 kN/m^2). On suppose que le béton travaille en stade homogène (béton non fissuré résistant à la traction).

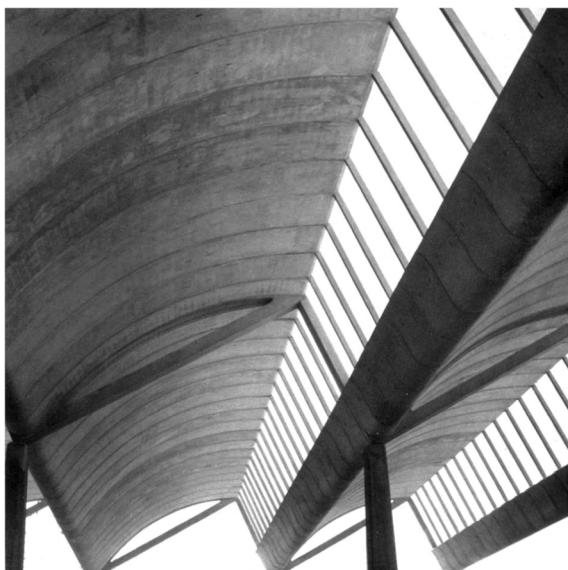
- 1) Pour un prédimensionnement, vérifier que la méthode de la poutre peut s'appliquer.
- 2) Déterminer et représenter graphiquement (élevation) les diagrammes des efforts de poutre N_x et $N_{x\varphi}$ dans les sections respectives les plus défavorables ; donner les valeurs numériques intéressantes.



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 8.9 Coque cylindrique en shed : (a) coupe ; (b) principe de la précontrainte ($\overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{P}_2 + \overrightarrow{P}_3 = \overrightarrow{Q}$) ;
 (c) vue intérieure ; (d) élément préfabriqué.

- 3) Calculer les valeurs numériques des efforts d'arc M_φ max et N_φ max.
- 4) Comparer les résultats avec ceux fournis par un calcul aux éléments finis (fig. Ex. 8.8.1b ; programme SAFE, Prof. J. Jirousek, LSC, EPFL).

Note : pour les calculs, utiliser les relations données à la section 8.9.

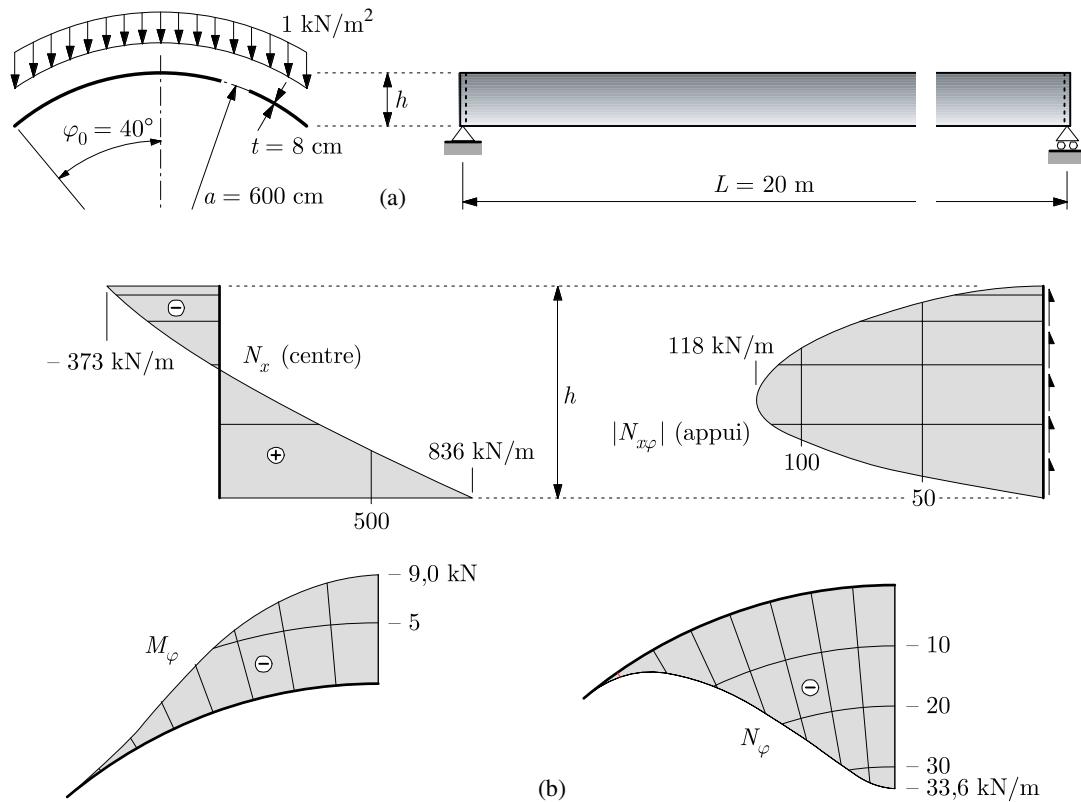


Fig. Ex. 8.8.1 Voûte cylindrique : (a) géométrie ; (b) efforts intérieurs.

8.8.2 On reprend la coque cylindrique autoportante de l'exercice précédent.

- 1) Faire le schéma statique de la demi-poutre en arc la plus sollicitée, y représenter les efforts intérieurs et les charges q_{arc} et s_{arc} ; calculer q_{arc} et $s_{\text{arc},\text{max}}$; chercher la position de la résultante des forces s_{arc} ; commenter.
- 2) Calculer les contraintes correspondant aux efforts intérieurs connus (en stade homogène).
- 3) Dessiner l'allure des trajectoires des contraintes principales sur une projection en plan de la surface moyenne ; distinguer les tractions (trait plein) des compressions (trait interrompu).

8.9 Annexe

La section droite d'une coque cylindrique mince à directrice circulaire est un arc de cercle (rayon a et ouverture $2\varphi_0$) d'épaisseur constante t admise concentrée sur la ligne moyenne de la directrice (fig. 8.10). Pour cet arc, la position z_G du centre géométrique, le moment statique d'une portion d'arc (ombrée sur la figure), par rapport à l'axe neutre y , et le moment d'inertie I_y sont donnés par

$$z_G = a \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \quad S(\varphi) = a^2 t \left(\sin \varphi - \varphi \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \right) \quad I_y = k a^3 t$$

avec

$$k = \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - 2 \frac{\sin^2 \varphi_0}{\varphi_0} + \varphi_0$$

De plus, pour une voûte simple sous charge uniforme p agissant sur toute la surface de la coque, les valeurs maximales de l'effort normal et du moment d'arc valent

$$N_{\varphi \text{ max}} \cong -1,8 p a \quad M_{\varphi \text{ max}} \cong -p a^2 \varphi_0^2 (0,1874 - 0,0500 \varphi_0^2)$$

Ces deux dernières formules sont suffisamment précises tant que $\varphi_0 < \pi/4$. Les formules exactes sont

$$N_{\varphi \text{ max}} = -p a \frac{m}{k} \sin \varphi_0 \quad M_{\varphi \text{ max}} = -p a^2 \left(1 - \frac{m}{k} (\varphi_0 - \sin \varphi_0) - \cos \varphi_0 \right)$$

avec

$$m = 2 - 2 \cos \varphi_0 - \varphi_0 \sin \varphi_0$$

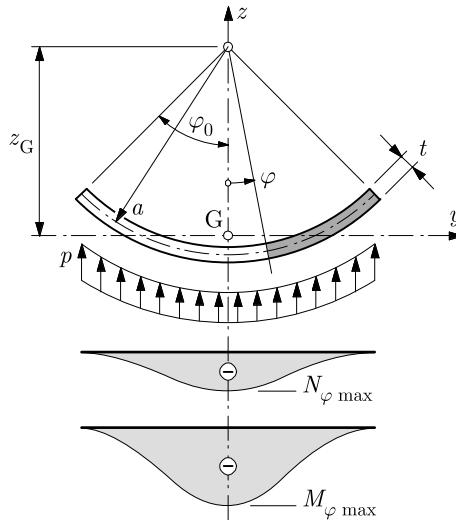


Fig. 8.10 Directrice circulaire (axes (y, z) de la section par G).

9 Paraboloïdes

9.1 Description et généralités

Une parabole *génératrice*, située dans un plan vertical, et une parabole *directrice*, située dans un plan vertical perpendiculaire au précédent, ont leurs sommets en commun. Lorsque la génératrice se déplace parallèlement à elle-même, son sommet parcourant la directrice, elle engendre une *surface de translation* appelée *paraboloïde*. On observe, dans cette construction, que les rôles de la directrice et de la génératrice peuvent être inversés, sans rien changer aux surfaces obtenues.

Si la directrice a une courbure de même signe, nulle, ou de signe contraire à celle de la génératrice, la surface obtenue est un *paraboloïde elliptique*, un *cylindre parabolique* ou un *paraboloïde hyperbolique* (fig. 9.1).

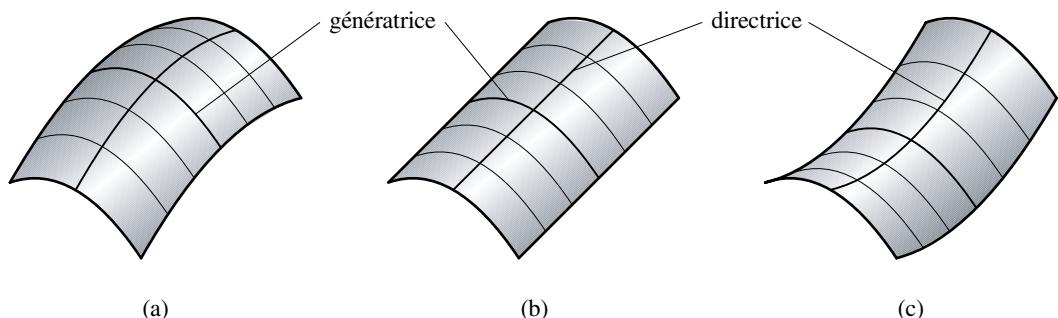


Fig. 9.1 Surfaces de translation issues de paraboles : (a) paraboloïde elliptique ($K > 0$);
(b) cylindre parabolique ($K = 0$); (c) paraboloïde hyperbolique ($K < 0$).

Des trois surfaces précédentes, la plus utilisée comme surface moyenne de coque est incontestablement le paraboloïde hyperbolique (PH en abrégé). D'un point de vue géométrique, ce dernier peut aussi être considéré comme une surface réglée : le PH est limité par quatre droites formant un quadrilatère gauche et contient deux systèmes de droites engendrant la surface (fig. 9.2).

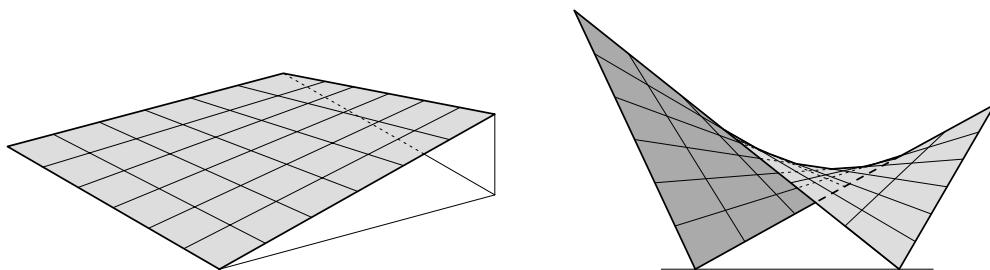


Fig. 9.2 Paraboloïdes hyperboliques comme surfaces réglées.

Le PH doit sa notoriété à l'architecte espagnol F. Candela, établi au Mexique. Ses réalisations frappent par leur élégance et leur audace (fig. 9.3 ; épaisseur du béton $t = 4$ cm !).

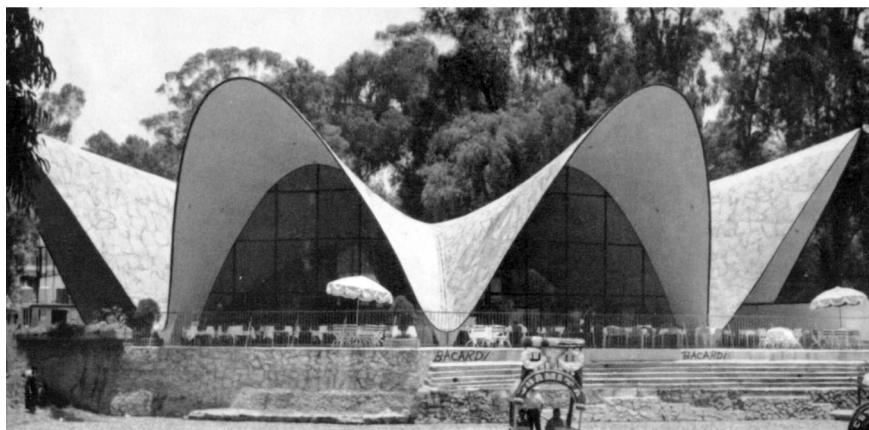


Fig. 9.3 Restaurant Los Manantiales, Xochimilco, Mexique (1958).
(Source : J. Joedicke, *Les Structures en Voiles et Coques*, Ed. Vincent, Fréal et Cie, Paris, 1962.)

Le PH présente plusieurs avantages :

- au niveau de la conception, il ouvre à l'ingénieur et à l'architecte un large éventail de possibilités (fig. 9.2 à 9.4) ;
- sa double courbure garantit sa rigidité et sa résistance au voilement ;
- sa surface étant réglée, il offre des avantages techniques évidents (coffrage par planches rectilignes par exemple), ce qui le rend économique.

Les paraboloïdes – et surtout les PH – ont fait l'objet de nombreuses études analytiques. On leur a appliqué les équations de la théorie membranaire en coordonnées cartésiennes (équations de Pucher, sect. 3.3). Les résultats sont peu convaincants et, en général, les conditions aux limites réelles ne peuvent être satisfaites correctement.

On a également tenté l'emploi de la théorie flexionnelle des coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (§ 3.4.4). A nouveau les résultats sont peu probants, lourds et, de surcroît, imposent des conditions aux limites irréalistes.

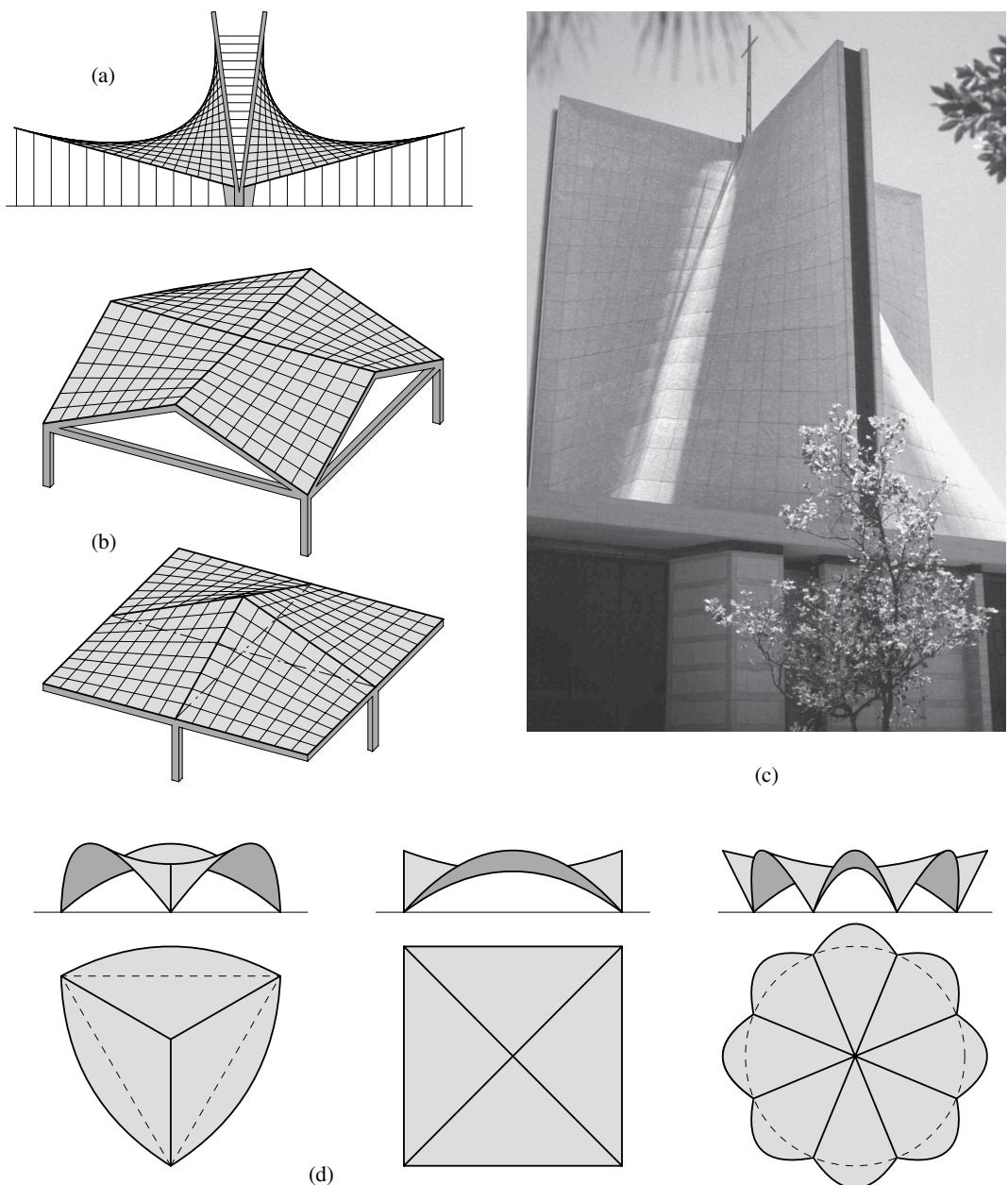


Fig. 9.4 Toitures diverses composées d'un ou plusieurs PH : (a) église San José Obrero, Mexique (esquisse) ; (b) coques formées de quatre PH assemblés par leurs bords rectilignes ; (c) cathédrale Saint Mary, San Francisco (photo F. Frey) ; (d) juxtaposition de plusieurs segments de PH le long de leurs arêtes paraboliques communes (coques en voûtes d'arêtes).

On se retrouve à peu près dans la même situation que pour les voûtes autoportantes (chap. 7 et 8) : aujourd’hui, les méthodes analytiques doivent être abandonnées au profit des techniques numériques (méthode des éléments finis, chap. 11).

Ci-après on ne mentionne qu’un seul résultat de la théorie membranaire, associé à un cas de charge simple, permettant de se faire une première idée du cheminement des efforts intérieurs et, partant, de contrôler la vraisemblance des résultats numériques.

9.2 Paraboloides hyperboliques

9.2.1 PH limité par ses génératrices rectilignes

Géométrie

Dans le plan (X, Y) , on considère le rectangle $A'B'C'D'$ de côtés $2a$ et $2b$, centré à l’origine, puis le quadrilatère gauche $ABCD$ obtenu en portant, selon l’axe Z , la cote c en A' , $-c$ en B' , c en C' et $-c$ en D' (fig. 9.5). Le contour $ABCD$ définit un PH qui se projette dans (X, Y) selon un rectangle (PH équilatère, l’intersection du PH avec un plan $Z = C_Z$ étant une hyperbole équilatère).

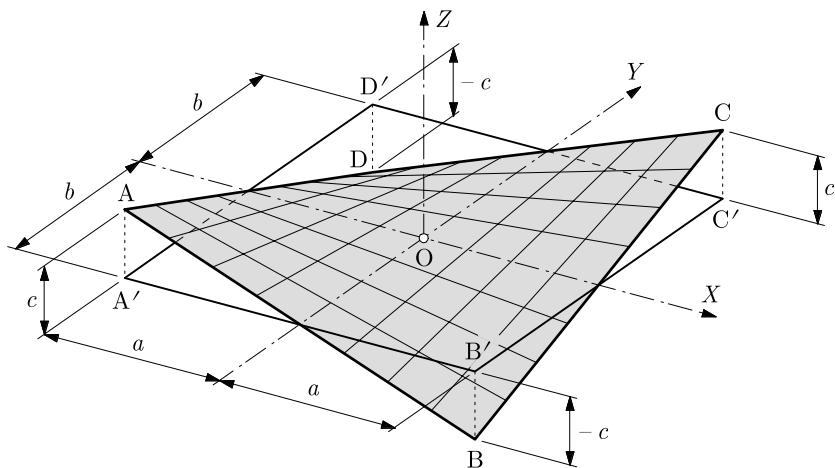


Fig. 9.5 PH équilatère (tout angle entre deux génératrices se projette, dans le plan (X, Y) , selon un angle droit).

L’équation de cette surface est (a, b, c en valeur absolue)

$$Z = \frac{c}{ab} XY \quad (9.1)$$

d’où

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{c}{ab} Y \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{c}{ab} X \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = \frac{c}{ab} \quad (9.3)$$

Cas de charge de type neige

Seule une action particulière provoque un état d'efforts intérieurs simple et intéressant : la charge verticale q , uniformément répartie sur l'horizontale et sur l'entier du PH (charge de *neige*). Avec (3.16), on définit la composante p_Z

$$p_Z dA = p_Z \eta dX dY = q dX dY$$

soit

$$p_Z \eta = q = \text{cste} \quad (9.4)$$

Utilisant les relations (9.3) et (9.4) dans l'équation d'équilibre (3.19), on obtient

$$2N_{xy} \frac{c}{ab} + q = 0$$

d'où

$$N_{xy} = -\frac{ab}{2c} q \quad (9.5)$$

Cet effort intérieur est constant ; avec $p_X = p_Y = 0$, les équations (3.17) et (3.18) fournissent

$$N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = f_1(Y) \quad N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = f_2(X)$$

Les fonctions f_1 et f_2 (constantes d'intégration) montrent que les conditions aux limites peuvent porter sur N_x et N_y , et non N_{xy} . On admettra que *les bords sont libres* ; l'état membranaire final est donc

$$N_x = N_y = 0 \quad N_{xy} = -\frac{ab}{2c} q = \text{cste} \quad (9.6)$$

c'est-à-dire un état de *cisaillement pur* : la charge de neige q est équilibrée par le seul flux de cisaillement (fig. 9.6).

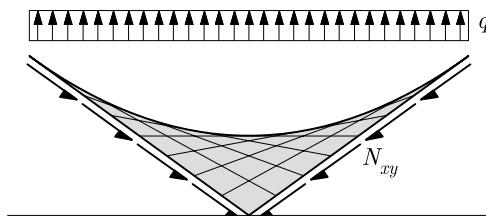


Fig. 9.6 Equilibre membranaire d'un PH.

On observe que la solution membranaire ne peut satisfaire à la condition $N_{xy} = 0$ sur les bords libres du PH. Elle est donc *incorrecte* (en tout cas dans la zone des bords).

Raidisseurs

Pour équilibrer N_{xy} , on a proposé de munir chaque bord du PH d'un raidisseur. Chaque raidisseur est soumis à une charge axiale répartie N_{xy} et travaille ainsi en traction ou compression. Les efforts normaux des raidisseurs conduisent les charges aux appuis (fig. 9.7) et l'équilibre membranaire est rétabli !

On admet encore que les raidisseurs sont indépendants les uns des autres, n'interagissent avec la coque que pour la transmission du flux N_{xy} et portent par eux-mêmes leur poids propre. Toutes ces hypothèses sont très irréalistes et on se retrouve dans une situation identique à celle des voûtes autoportantes (§ 7.5.3 et sect. 7.7) : l'ensemble étant en réalité monolithique, il y a incompatibilité cinématique entre le PH et ses raidisseurs, et ces derniers, par leur poids, chargent la coque plus qu'ils ne la soulagent. (On soupçonne même certain raidisseur d'être à l'origine de l'effondrement de la coque.) L'effet esthétique est également désastreux, puisque la minceur réelle de la coque est masquée.

Il faut bannir ces raidisseurs. La coque en créera la fonction par elle-même, sur ses bords et dans son épaisseur, selon la nécessité statique ; s'il le faut, on peut augmenter localement et progressivement l'épaisseur de la coque (par exemple dans la zone des appuis).

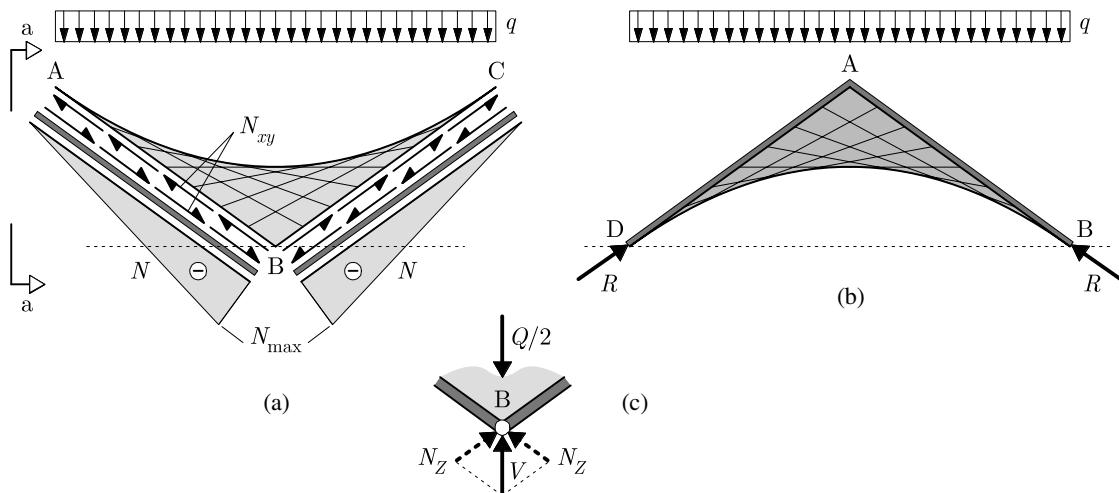


Fig. 9.7 Equilibre membranaire d'un PH muni de raidisseurs : (a) vue éclatée, forces et diagramme N des raidisseurs ; (b) vue a-a et réactions d'appui R ; (c) équilibre vertical du nœud d'appui B (Q : résultante des q ; N_Z et V : projections dans le plan vertical de N_{max} et R).

Résistance en arc

On sait que l'on peut rapporter l'état membranaire de la coque au plan (X, Y) (équations (3.20), § 3.3.2). Puisque $N_{XY} = N_{xy} = \text{cste}$, il existe, à $\pm 45^\circ$ et rapportés dans (X, Y) , des *efforts normaux principaux*

$$N_{1,2} = \mp N_{XY} = \mp N_{xy} = \pm \frac{ab}{2c} q = \text{cste} \quad (9.7)$$

Or les sections droites du PH par des plans verticaux orientés à $\pm 45^\circ$ sont des paraboles (directrices et génératrices). Les composantes horizontales des efforts normaux y étant constantes, la théorie membranaire du PH sous charge de neige conduit donc encore à l'interprétation suivante (fig. 9.8) : *la charge est portée, par moitiés, par deux systèmes d'arcs paraboliques ; dans le premier, les arcs sont à l'image de câbles tendus, dans le second, de poutres comprimées*. Sur un bord, au point de rencontre entre un câble et une poutre, la résultante est égale à N_{xy} .

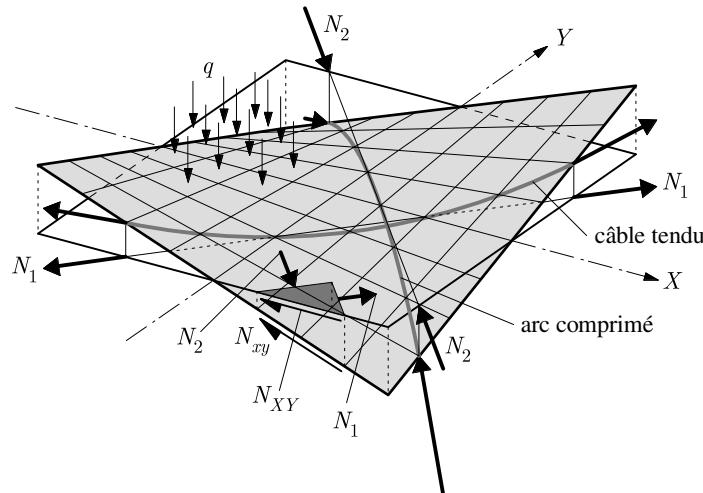


Fig. 9.8 Travail membranaire du PH en arcs tendus et comprimés selon les paraboles génératrices et directrices (q agit ici dans le sens négatif).

Cette interprétation de la théorie membranaire peut aider à visualiser le jeu des forces dans un PH, mais n'est évidemment pas meilleure que la précédente (cisaillement pur). Par exemple, sur les bords libres, les câbles et poutres ne sont pas ancrés et les effets de câble tendu et d'arc comprimé ne peuvent se développer ... sauf, peut-être, dans la partie centrale du PH.

Application

Examinons le comportement d'une toiture sur plan carré, formée de quatre PH (fig. 9.9). Sous charge de neige q , en théorie membranaire, les flux de cisaillement (9.6) peuvent transmettre la charge aux appuis via les poutres de raidissement. L'équilibre, aisément vérifiable, est satisfait (fig. 9.9a). Les appuis doivent être fixes pour reprendre les poussées horizontales.

Un PH quelconque, sous cisaillement pur, souhaite se déformer en losange (fig. 9.9b) : la symétrie et les conditions aux limites de la structure montrent que c'est impossible.

Tout raidisseur, sous effort normal, va entraîner une bande de coque dans sa déformation (largeur collaborante ; fig. 9.9b) : le raidisseur ne peut être admis indépendant de la coque et son utilité est discutable ; il suffit d'épaissir quelque peu la coque au bord si nécessaire.

Les raidisseurs horizontaux EG et HF ne peuvent supporter à eux seuls leur poids propre ; ils chargent donc la coque. Or les arêtes en V , à la jonction des PH, le long de EG et HF, suffisent à former un effet de raidisseur si nécessaire.

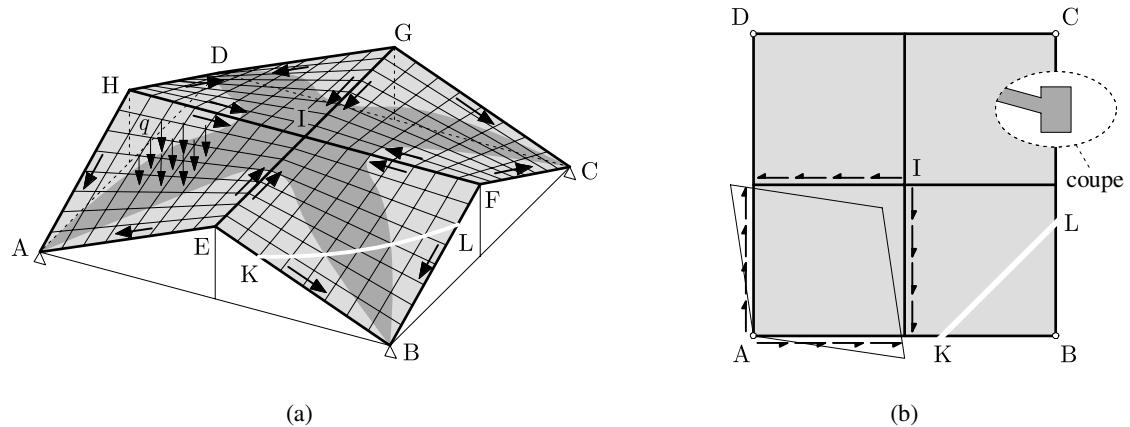


Fig. 9.9 Jonction de quatre PH posés sur quatre appuis fixes : (a) jeu de forces (les flèches imagent les efforts normaux des raidisseurs, ici tous comprimés) ; (b) divers éléments de la déformation ou de la résistance (les flèches imagent les efforts tangentiels sur les bords du PH AEIH).

Les raidisseurs apparaissent donc inutiles.

Une bande diagonale, telle que KL, devrait travailler en câble tendu, supportant la moitié de la charge, mais ne peut pas le faire puisqu'il n'y a quasiment aucun appui en K et L (bord libre ; fig. 9.9b). Ainsi, *la structure va essentiellement travailler à l'image de deux arcs paraboliques croisés comprimés AIC et BID, supportant toute la charge.* (La stabilité de la construction repose sur la tenue de ses quatre appuis fixes.)

En définitive, la théorie membranaire donne une idée fausse de la transmission des efforts ; néanmoins, en la corrigeant, elle guide vers le mode de travail réel de la structure.

Conclusion

On utilisera la théorie membranaire des PH avec la plus grande prudence, en la corrigeant, fût-ce intuitivement, afin de s'adapter au cas réel, en particulier en ce qui concerne les conditions aux limites. Pour une analyse réaliste, on aura recours à un calcul numérique basé sur la théorie flexionnelle (méthode des éléments finis ; chap. 11).

9.2.2 Paraboloïde limité par ses paraboles

Géométrie

Pour le PH sur plan rectangulaire $2a \times 2b$ de la figure 9.10, les bords, contenus dans des plans verticaux, sont des paraboles (génératrices – directrices) et l'équation de la surface, dans les axes indiqués, est

$$Z = c_X \frac{X^2}{a^2} - c_Y \frac{Y^2}{b^2} = \frac{X^2}{2r_X} + \frac{Y^2}{2r_Y} \quad (9.8)$$

où c_X et c_Y sont les flèches des paraboles ($c_X > 0$ et $c_Y > 0$), et r_X et r_Y les rayons de courbure au sommet des paraboles, avec ici $r_Y < 0$ (courbure de Gauss négative).

L'angle γ que fait la projection sur (X, Y) des génératrices rectilignes du PH avec l'axe X est donné par

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{c_X}{c_Y}} \quad (9.9)$$

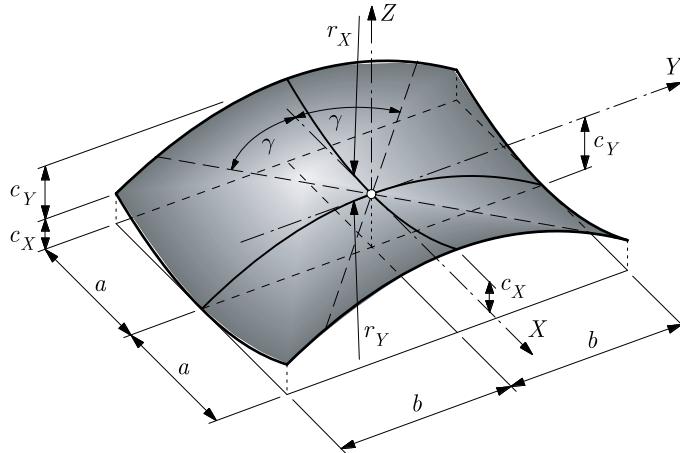


Fig. 9.10 PH sur plan rectangulaire, limité par ses paraboles.

Cas de charge neige

Sous une charge verticale q , répartie uniformément sur l'horizontale (type *neige*), les équations d'équilibre (3.17) à (3.19) sont satisfaites par les trois solutions (efforts rapportés au plan (X, Y))

$$N_X = 0 \quad N_Y = \frac{qb^2}{2c_Y} \quad N_{XY} = 0 \quad (9.10)$$

$$N_X = -\frac{qa^2}{2c_X} \quad N_Y = 0 \quad N_{XY} = 0 \quad (9.11)$$

$$N_X = -\frac{qa^2}{4c_X} \quad N_Y = \frac{qb^2}{4c_Y} \quad N_{XY} = 0 \quad (9.12)$$

On peut facilement vérifier que la dernière, (9.12), est *identique* à (9.7) : la charge q est reprise par moitiés par des arcs comprimés parallèles au plan (X, Z) et par des arcs tendus parallèles au plan (Y, Z) ; cela suppose que les quatre bords de la coque sont appuyés en conséquence (déplacements associés à N_X et N_Y nuls).

Quant aux deux premières solutions, elles correspondent à la reprise de toute la charge par des arcs tendus seuls, pour (9.10), ou par des arcs comprimés seuls, pour (9.11), avec les conditions aux limites associées ($v = 0$ en $Y = \pm b$ pour (9.10), ou $u = 0$ en $X = \pm a$ pour (9.11), u et v étant les déplacements en coordonnées curvilignes).

Il est clair que ces solutions membranaires ne s'accordent guère avec les exigences de la construction (bords libres). De plus, elles ne sont pas rationnelles, car elles ne correspondent pas à un vrai

comportement spatial de la coque. Enfin, les appuis liés aux efforts N_X et N_Y des équations (9.10) à (9.12) ne sauraient réaliser la condition supplémentaire commune $N_{XY} = 0$.

A nouveau, la solution membranaire est décevante et un calcul flexionnel par voie numérique est nécessaire.

9.2.3 Coque en voûte d'arête

On peut assembler plusieurs segments de PH (fig. 9.11) pour former une *coque en voûte d'arête* (fig. 9.3 et 9.4d). Un segment peut être extrait du PH de la figure 9.10 à l'aide de deux plans verticaux contenant l'axe Z , disposés symétriquement par rapport au plan (X, Z) avec un angle d'ouverture adéquat (par exemple $2\pi/n$, si n est le nombre de segments pour une voûte complète).

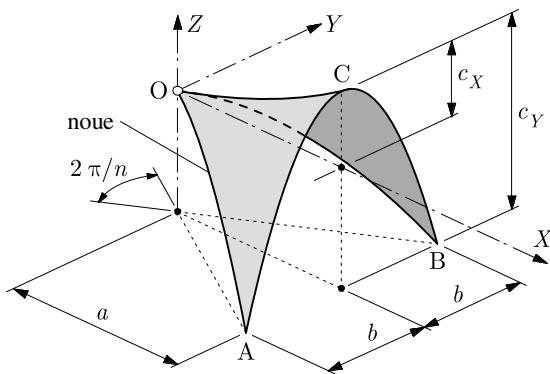


Fig. 9.11 Segment de PH d'une coque en voûte d'arête (n segments sur 2π).

Avec les notations de la figure 9.11, l'équation de la surface est identique à (9.8)

$$Z = c_X \frac{X^2}{a^2} - c_Y \frac{Y^2}{b^2}$$

L'intersection de cette surface avec tout plan contenant l'axe Z est une parabole. Les *noues*, arêtes de jonction des segments (arcs OA et OB), sont des arcs de parabole de sommet O. L'arc ACB est parabolique s'il est dans un plan vertical, hyperbolique s'il est dans un plan incliné.

En première approximation, on peut considérer que les noues forment une ossature de poutres en arc assurant la rigidité et la stabilité de la coque ; ces poutres sont chargées par les réactions d'appui des segments de PH travaillant en membrane.

L'étude membranaire d'un segment par les équations (3.17) à (3.19) est impraticable manuellement. On aura une idée du comportement en admettant que le segment travaille selon la solution (9.10), c'est-à-dire en arcs (comprimés) parallèles au plan (Y, Z) .

Face à ces approximations, une analyse numérique en théorie flexionnelle est évidemment nécessaire. Il se produit des concentrations d'effort importantes au voisinage des noues (effet de bord) et aux pieds des segments (zones d'appui).

9.3 Paraboloïdes elliptiques

Géométrie

Pour un paraboloïde elliptique (PE en abrégé) à base rectangulaire $2a \times 2b$ (fig. 9.12), l'équation de la surface, dans les axes indiqués, est

$$Z = c_X \frac{X^2}{a^2} + c_Y \frac{Y^2}{b^2} = \frac{X^2}{2r_X} + \frac{Y^2}{2r_Y} \quad (9.13)$$

où c_X, c_Y sont les flèches des paraboles ($c_X > 0, c_Y > 0$) et r_X, r_Y les rayons de courbure des paraboles en leur sommet ($r_X > 0, r_Y > 0$). Les bords, contenus dans des plans verticaux, sont paraboliques. Cette équation est quasi identique à (9.8) : en attribuant un signe à c_Y , PH et PE ont même équation.

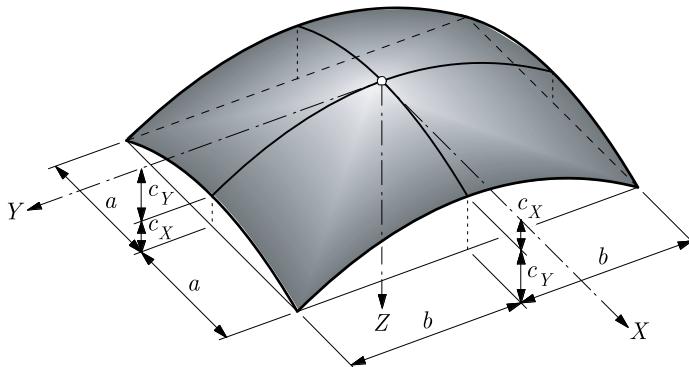


Fig. 9.12 Paraboloïde elliptique sur plan rectangulaire, limité à ses directrices et génératrices.

Charge de neige

Sous une charge de type *neige*, les équations d'équilibre (3.17) à (3.19) sont à nouveau satisfaites pour des distributions élémentaires des efforts normaux semblables à (9.10), (9.11) ou (9.12). Dans ces solutions, la coque travaille en arcs accolés, tous tendus ou comprimés. Elle doit être appuyée sur deux bords parallèles ou sur les quatre bords. Ces solutions ne présentent donc guère de valeur pratique, car le PE est visiblement fait pour être appuyé sur ses quatre coins seulement.

Une solution membranaire a été établie pour ce dernier cas en développant la solution en série. Mais il en résulte que N_{XY} n'est pas nul sur les bords.

Une fois de plus, les solutions membranaires ne sont pas réalistes et il faut calculer la coque numériquement par la théorie flexionnelle.

9.4 Exercices

9.4.1 Avec quatre PH limités par leurs bords droits, à plans rectangulaires identiques, assemblés le long de leurs bords droits, imaginer divers types de couverture à l'image de celles de la figure 9.4(b).

9.4.2 On considère une coque formée de quatre PH juxtaposés, appuyée en son milieu (coque en parapluie inversé ; fig. Ex. 9.4.2). Sous l'action de la charge de neige uniquement, en utilisant la solution membranaire et en introduisant des raidisseurs, trouver la distribution des efforts intérieurs et vérifier que l'équilibre est exactement satisfait partout, y compris dans la colonne d'appui.

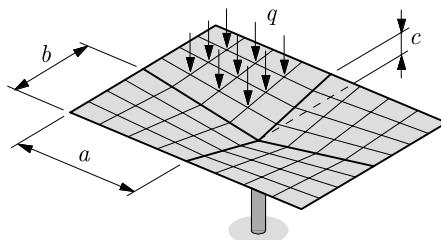
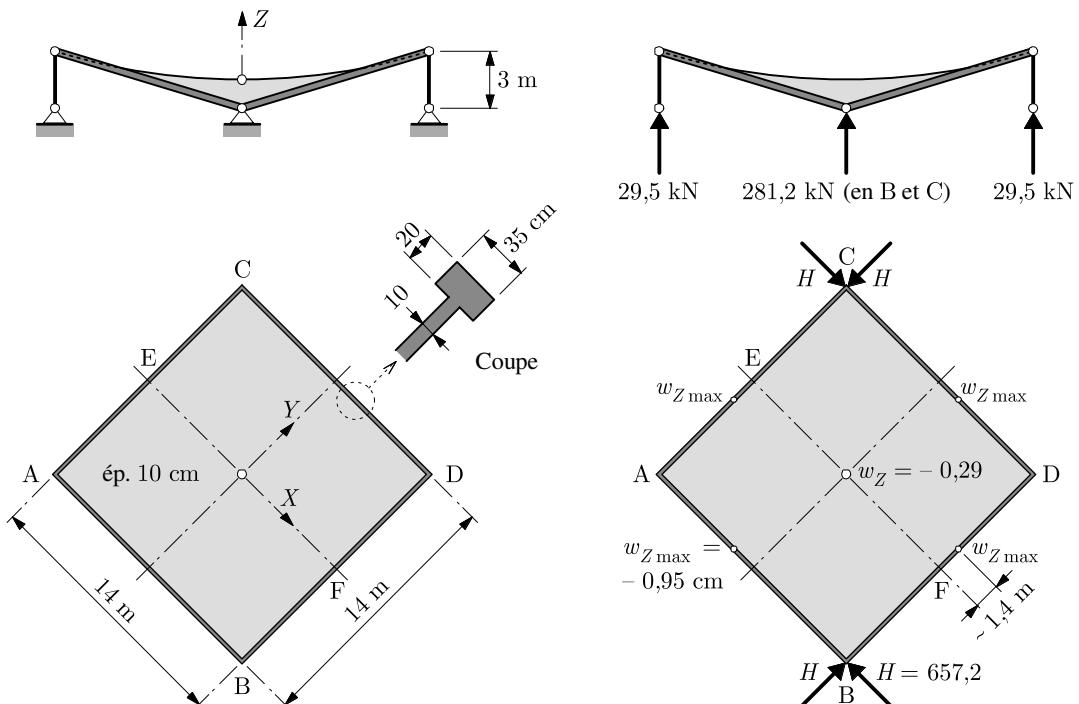


Fig. Ex. 9.4.2

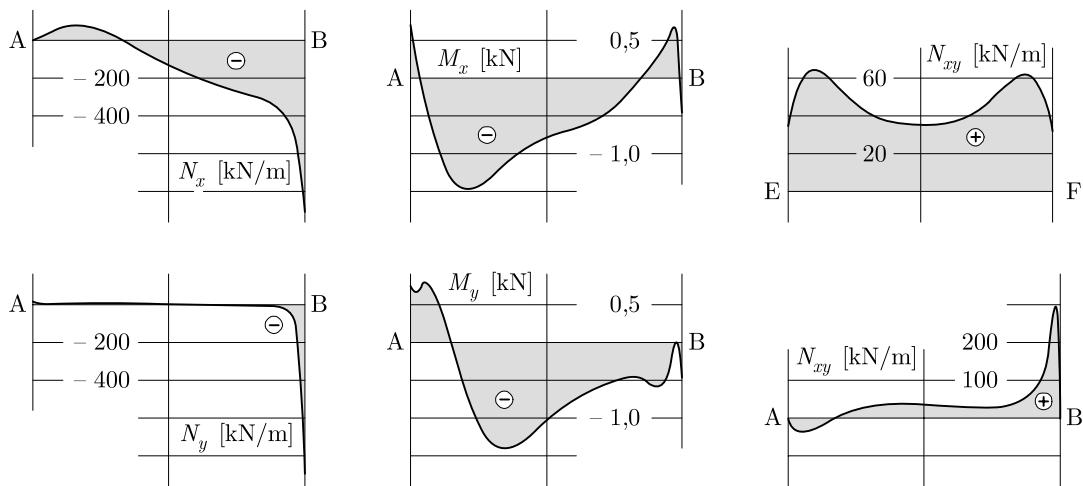
9.4.3 Un PH en béton armé, d'épaisseur constante $t = 10$ cm, s'appuie sur son pourtour sur des poutres de bord de section rectangulaire ($b = 20$ cm, $h = 35$ cm) centrées sur le bord de la surface moyenne de la coque (fig. Ex. 9.4.3a). Ces poutres sont appuyées à leurs extrémités. Cette structure est admise surbaissée. Elle est soumise à son poids propre (25 kN/m³) et au poids de l'isolation (120 N/m²).



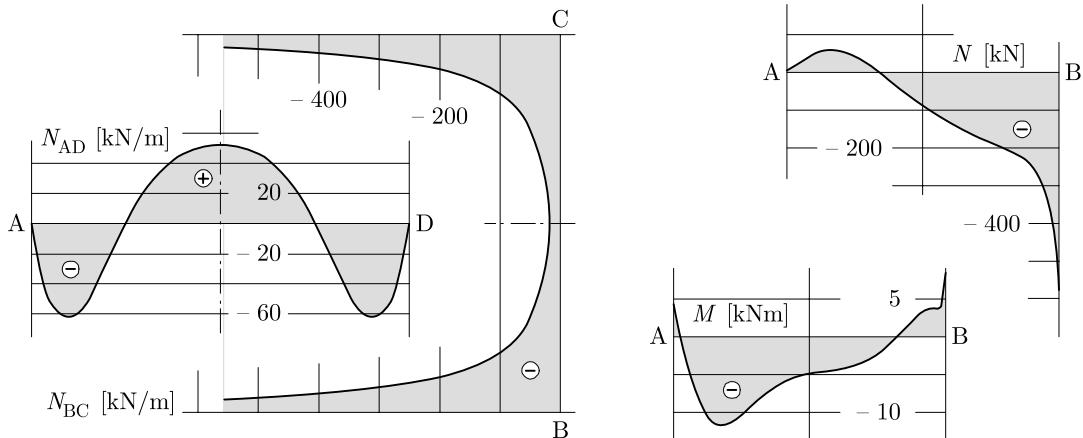
(a) Géométrie du PH.

(b) Réactions [kN] et déplacements verticaux w_Z [cm]

$$(E = 21 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 ; \nu = 0,2)$$



(c) Efforts intérieurs dans la coque.



(d) Efforts normaux selon les diagonales AD et BC.

(e) Efforts intérieurs dans une poutre de bord.

Fig. Ex. 9.4.3

- 1) Déterminer les efforts intérieurs en théorie membranaire et donner les efforts principaux le long des diagonales AD et BC.
- 2) Dessiner le diagramme de l'effort normal N pour la poutre de bord AB, dû à l'action de la coque.
- 3) Les poutres de bord étant admises indépendantes du PH et l'une de l'autre, dessiner leurs diagrammes M et N dus à leur poids propre.
- 4) Calculer les réactions sur les appuis.
- 5) Comparer les valeurs obtenues à celles issues d'un calcul aux éléments finis en théorie flexionnelle (fig. Ex. 9.4.3b à e); commenter.

10 Structures plissées

10.1 Description

Une *structure plissée* est une construction polyédrique, formée d'un ensemble de *panneaux plans* (faces ou pans) assemblés le long de leurs *arêtes* (sect. 1.5). Les panneaux ont une forme en triangle, rectangle, trapèze, parallélogramme, quadrilatère, hexagone ... et sont généralement à épaisseur constante. Ils sont reliés *rigidement* les uns aux autres, pour d'évidentes raisons techniques (les arêtes en charnière sont exceptionnelles). Les matériaux utilisés sont le béton et l'acier, parfois le bois, l'aluminium et les matériaux composites.

Les applications pratiques sont nombreuses : murs, culées de pont, ponts, dalles orthotropes, réservoirs, silos, toitures, vannes, portes d'écluse, tours, bâtiments, noyaux des bâtiments, fondations, pièces en tôle pliée, etc. La figure 10.1 montre le nœud d'un pont-rail biais où se rencontrent, sur appui, l'arc (double), la poutre-tirant et l'entretoise : l'ensemble est une structure plissée complexe.

10.2 Mode de travail

Chaque panneau d'une structure plissée travaille comme une *plaque-membrane*. A cause du monolithisme, le comportement est toujours *flexionnel* et toute approche purement membranaire doit être écartée.

Il est vain d'espérer calculer une structure plissée à la main, même de manière approchée. Font exception les structures qui ont des formes simples particulières, le plus souvent prismatiques (coques prismatiques, silos, murs de soutènement, etc.). Analytiquement, on devrait écrire les équations différentielles de l'état membranaire (élasticité en état plan de contrainte) et de l'état flexionnel (Kirchhoff-Love ou Reissner-Mindlin) dans chaque panneau et exprimer compatibilité et équilibre aux arêtes, ce qui est clairement irréalisable. Seules les *méthodes numériques* peuvent donner une solution acceptable de ces structures ; c'est donc elles qu'il faut utiliser (chap. 11).

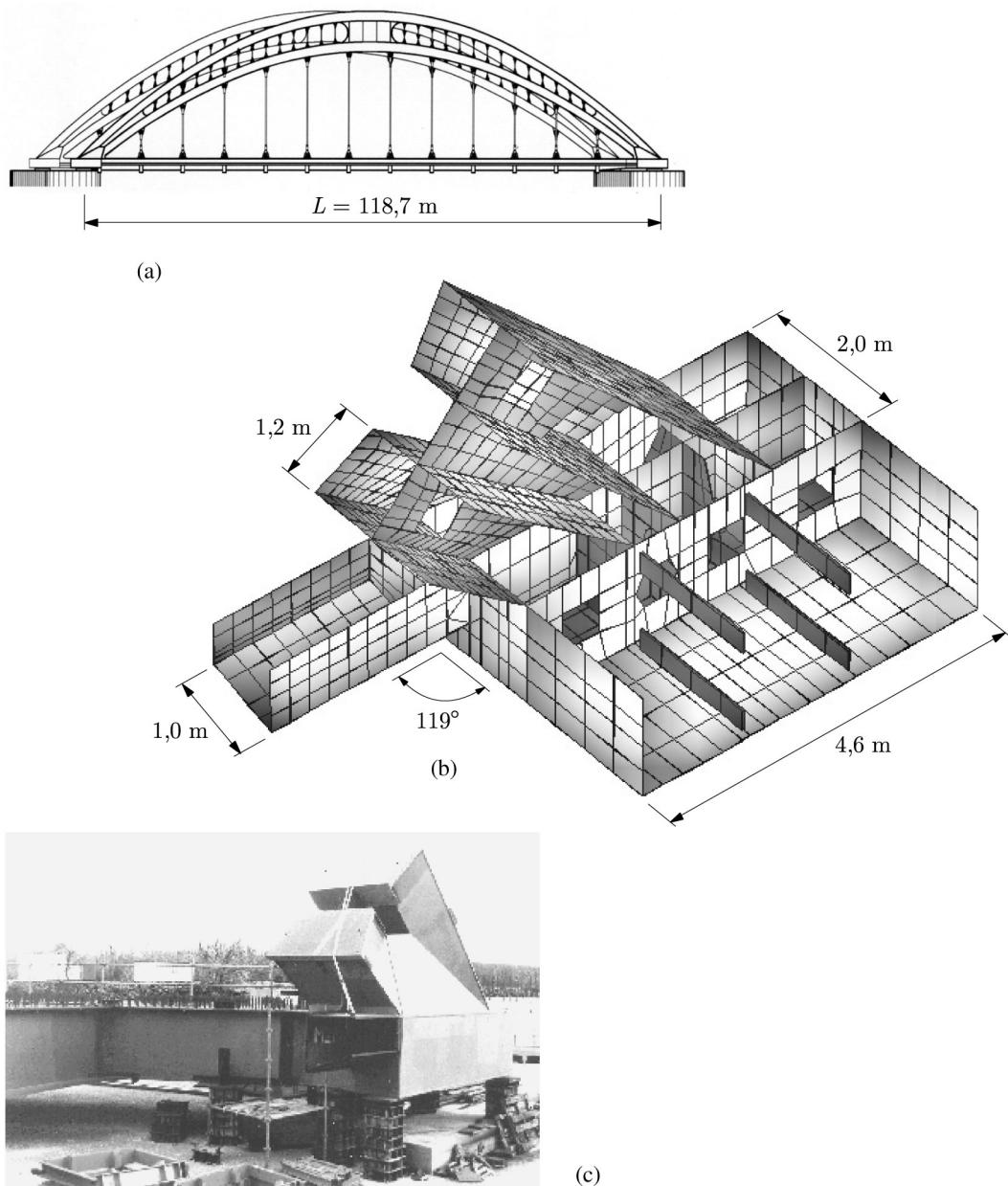


Fig. 10.1 Viaduc de Mornas, ligne TGV Méditerranée : (a) élévation ; (b) discrétisation (partielle) du nœud ; (c) nœud au montage. (Source : Greisch Ingénierie, B 4031 Liège, Belgique ; référence : V. de Ville de Goyet, J.-M. Cremer, A. Lothaire, J.-Y. Del Forno, *Viaducs de l'Arc, de Mornas, de Mondragon et de Donzère : 4 ouvrages, 3 conceptions*, Bulletin Ponts Métalliques, n° 19, OTUA, 1999.)

Il existe une catégorie particulière de structures plissées qui présente un intérêt certain, les *coques prismatiques*, et pour laquelle on peut développer une solution analytique (sect. 10.5).

10.3 Coques prismatiques

La surface moyenne d'une coque prismatique est engendrée par la translation selon un axe d'une ligne polygonale située dans un plan, la *directrice*. Chaque point de la directrice engendre une *génératrice* (les angles du polygone engendrent les arêtes). Si le plan de la directrice est perpendiculaire aux génératrices, la coque est *droite*, sinon elle est *biaise*.

Pour appuyer la coque et, éventuellement, la raidir (en préservant la forme de la directrice), on dispose, transversalement à l'axe, des éléments raidisseurs, les *diaphragmes*.

Les applications pratiques les plus courantes se rencontrent dans les toitures prismatiques et les ponts, où les directrices (sections droites) les plus variées sont possibles (fig. 10.2). La géométrie relativement simple rend ces constructions rationnelles (construction, coffrage, préfabrication, pré-contrainte).

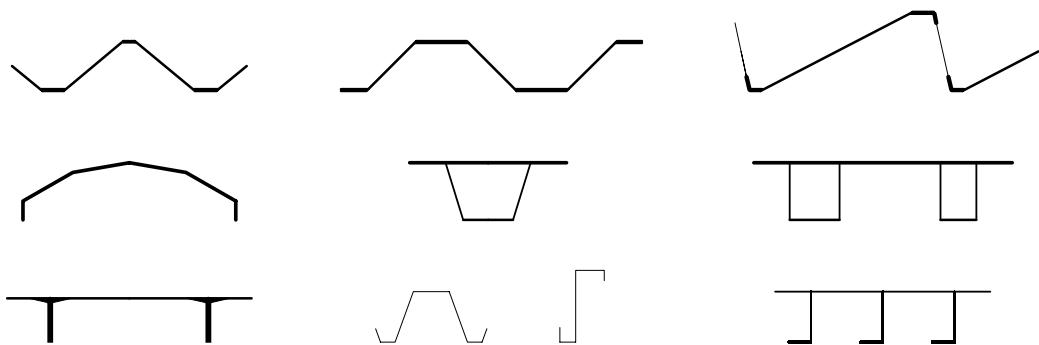


Fig. 10.2 Directrices de coques prismatiques.

On observe la parfaite similitude de ces notions avec celles des voûtes cylindriques autoportantes. On peut donc parler, par analogie, de coque simple ou multiple (transversalement), de coque à simple portée ou continue (longitudinalement), de poutres raidisseurs, etc.

10.4 Coques prismatiques droites à simple portée

Les ingénieurs ont cherché à développer des techniques de calcul permettant l'analyse de la *coque prismatique droite à simple portée*. On se limite à ce type de structure, cas le plus simple, dans la suite de ce chapitre.

Une telle coque est formée de panneaux rectangulaires liés le long de leurs arêtes longitudinales (fig. 10.3). Chaque panneau s'appuie à ses extrémités sur des diaphragmes. On admet que ces diaphragmes sont parfaitement rigides dans leur plan et n'offrent aucune rigidité perpendiculairement à leur plan ; les panneaux y sont donc en appui simple.

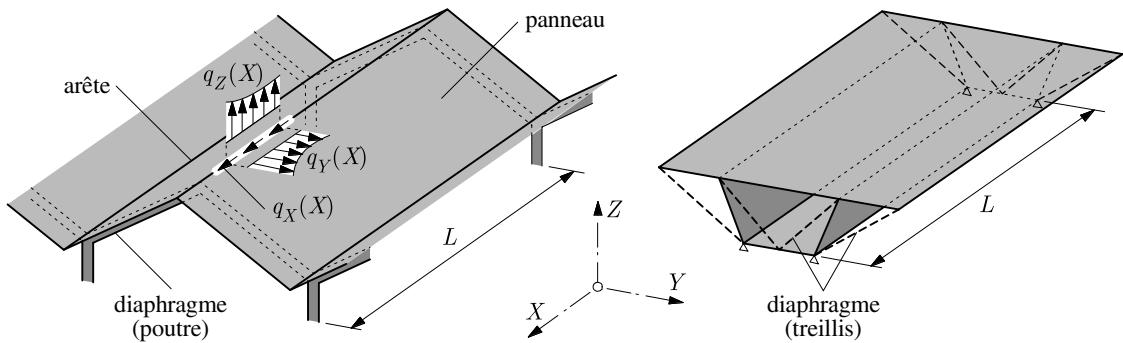


Fig. 10.3 Coques prismatiques droites à simple portée L .

On distingue, hormis la méthode des éléments finis, trois manières d'aborder le calcul.

La première utilise la *méthode de la poutre*. Issue de l'étude des voûtes autoportantes longues (sect. 8.5), il suffit de l'adapter aux coques prismatiques, en respectant au mieux hypothèses et limitations. Elle s'applique donc aux coques prismatiques *longues* avec toute la réserve nécessaire. C'est la méthode la plus simple.

La seconde est une *formulation en déplacements*, exprimant l'équilibre au droit des arêtes en fonction des déplacements, sur base du comportement plaque-membrane des panneaux. C'est une formulation quasi exacte résolvant les équations de l'élasticité plane et de la flexion des plaques minces par l'emploi de séries. (La précision peut être affectée par la capacité à représenter la géométrie et les charges (§ 10.5.2), et par la limitation du développement en série.) L'intérêt de cette formulation est double : elle est aisément programmable et est à l'origine de la *méthode des bandes finies*, une forme particulière de la méthode des éléments finis (sect. 11.9). C'est aussi la méthode la plus lourde.

La troisième regroupe l'ensemble des techniques destinées au calcul manuel via le biais d'hypothèses simplificatrices. Les diverses tentatives ont montré qu'on n'obtenait pas de résultats valables si l'on simplifiait trop. La méthode qui s'est imposée, dite de Yitzhaki, reste de ce fait longue et laborieuse d'emploi : aujourd'hui son usage n'est plus justifié.

10.5 Méthode par panneaux

10.5.1 Historique

Les coques prismatiques apparaissent en Allemagne en 1930. Les premières analyses flexionnelles sont proposées dès les années trente, en Allemagne et en Autriche, où elles progressent jusqu'au milieu des années cinquante. S'en inspirant directement, Goldberg et Leve (USA, 1957) présentent une théorie rigoureuse, mise ensuite sous forme matricielle pour la méthode des déplacements par De Fries-Skene et Scordelis (USA, 1964). Cette théorie est à l'origine de la méthode des bandes finies (Cheung, USA, 1968). On n'en présente ici que les grandes lignes, dans l'optique d'une formulation matricielle en déplacements.

10.5.2 Hypothèses

La coque prismatique est droite, à simple portée (L) et appuyée à ses extrémités sur des diaphragmes parfaitement rigides dans leur plan et totalement souples normalement à leur plan. Les charges agissent sur les arêtes seulement (fig. 10.3).

La coque est rapportée au système d'axes cartésiens (X, Y, Z) où X est parallèle aux génératrices. Les diaphragmes imposent v_Y et w_Z nuls aux extrémités. Les charges (q_X, q_Y, q_Z [N/m]) varient arbitrairement le long des arêtes, mais la résultante des charges longitudinales q_X doit être nulle.

La coque est considérée comme formée d'un assemblage de panneaux rectangulaires (fig. 10.4a), de longueur L , de largeur $2b$ et d'épaisseur t constante (fig. 10.4b). Les propriétés matérielles ne varient pas sur un panneau. Les panneaux sont rigidement liés entre eux : ils ont même déplacement et même rotation le long des arêtes communes. Ils sont sollicités à la fois dans leur plan (état membranaire) et hors de leur plan (état flexionnel). Pour étudier ces sollicitations sur un panneau particulier, on y définit un système d'axes local (x, y, z) comme l'indique la figure 10.4(c).

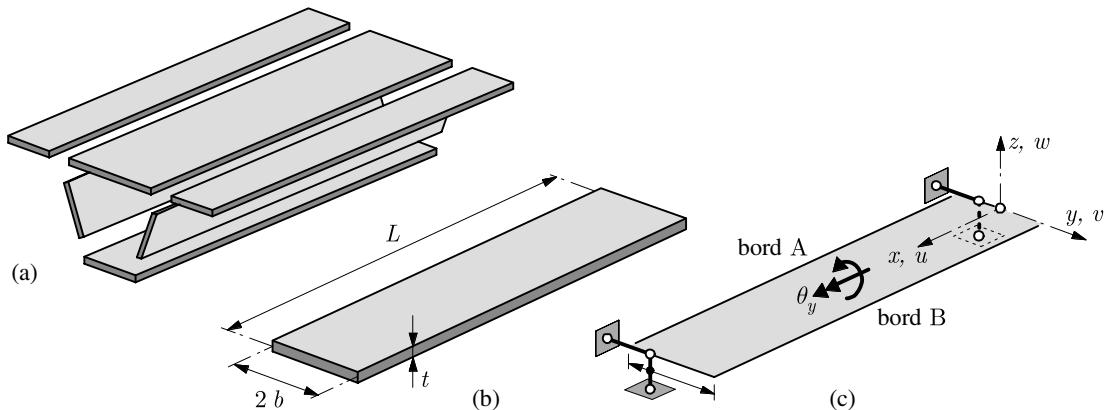


Fig. 10.4 Analyse d'une coque prismatique par panneaux : (a) décomposition en panneaux rectangulaires ; (b) géométrie d'un panneau ; (c) axes locaux et cinématique d'un panneau.

Remarques

Les panneaux ne sont pas chargés et, grâce à cette hypothèse, on peut résoudre les équations différentielles qui suivent (équations homogènes). En réalité, les panneaux sont toujours chargés (poids propre par exemple). Il faut alors rechercher des charges d'arête équivalentes, puis ajouter à la solution obtenue sur base des charges d'arêtes, la sollicitation locale des panneaux. Il est aussi possible de diviser un panneau large en plusieurs panneaux étroits, en augmentant le nombre d'arêtes (meilleure représentation des charges ; approximation d'une épaisseur t variable ; etc.).

Les diaphragmes étant souples hors plan et rigides dans leur plan, chaque panneau est (et doit être) en appui simple sur ses bords transversaux. En fait, selon la réalisation technique choisie pour les diaphragmes, cette hypothèse est plus ou moins bien vérifiée. Ici, comme dans la méthode des bandes finies (§ 11.9.3), toute continuité avec les diaphragmes est ignorée. Si, par exemple, les diaphragmes sont des parois pleines, il apparaît en leur voisinage une zone perturbée par des *effets de bord*, où les résultats de la théorie qui suit n'ont guère de valeur.

10.5.3 Equations utiles

On rappelle ci-après quelques équations fondamentales utiles pour la suite. Elles régissent l'état membranaire et l'état flexionnel en coordonnées cartésiennes (x, y, z) et sont exprimées *en fonction des déplacements*. Elles peuvent se déduire aisément des relations du chapitre 2. C et D sont les raideurs extensionnelle et flexionnelle (2.52)

$$C = \frac{Et}{1 - \nu^2} \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Etat membranaire (fig. 10.5a)

Les déplacements sont $u(x, y)$ et $v(x, y)$. Les efforts intérieurs valent

$$\begin{aligned} N_x &= C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) & N_y &= C \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ N_{xy} &= N_{yx} = C \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (10.1)$$

Les deux équations d'équilibre *homogènes* sont (équations de Navier ; TGC vol. 3, § 5.11.7)

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 + \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10.2)$$

Etat flexionnel (fig. 10.5b)

Le déplacement est $w(x, y)$. Les efforts intérieurs sont (TGC vol. 4 ; TGC vol. 6, § 8.5.2)

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} & V_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \\ V_x^* &= V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} & V_y^* &= V_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \end{aligned} \quad (10.4)$$

où V_x^* et V_y^* sont les efforts tranchants équivalents ou de Kirchhoff.

L'équation d'équilibre *homogène* (équation de Lagrange) est

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (10.5)$$

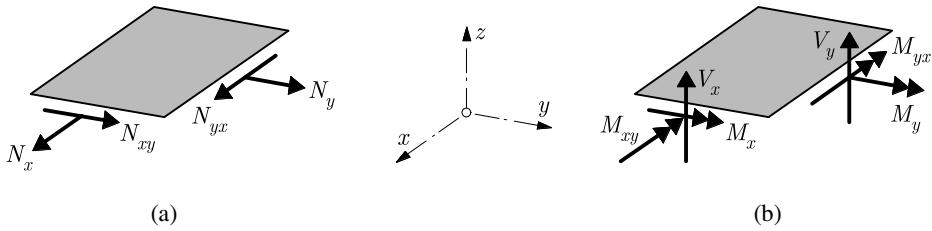


Fig. 10.5 Efforts intérieurs : (a) de membrane ; (b) de plaque.

10.5.4 Conditions aux limites

Les panneaux travaillant en plaques-membranes, leurs conditions aux limites sont, comme pour les coques (sect. 2.10), au nombre de quatre ; deux touchent l'état membranaire (elles sont données en premier ci-après) et deux l'état flexionnel.

Aux extrémités appuyées du panneau, ces conditions sont (axes locaux)

$$v = 0, \quad N_x = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ et } x = L \quad (10.6)$$

Le long des arêtes, l'encastrement des panneaux les uns dans les autres se traduit par la continuité des déplacements u , v , w et θ_y en $y = \pm b$. Si $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $w(x, y)$ sont les champs des déplacements, on a, pour les bords A ($y = -b$) et B ($y = b$),

$$u_A = u \text{ et } v_A = v \quad \text{en } y = -b \quad u_B = u \text{ et } v_B = v \quad \text{en } y = b \quad (10.7)$$

$$w_A = w \text{ et } \theta_{yA} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{en } y = -b \quad w_B = w \text{ et } \theta_{yB} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{en } y = b \quad (10.8)$$

A ces déplacements s'associent les forces d'interaction entre les panneaux, c'est-à-dire les réactions internes t , r et m représentées à la figure 10.6. Si $N_y(x, y)$, $N_{yx}(x, y)$, $M_y(x, y)$ et $V_y^*(x, y)$ sont les champs d'efforts intérieurs correspondants, on a

$$t_A = -N_{yx} \text{ et } n_A = -N_y \quad \text{en } y = -b \quad t_B = N_{yx} \text{ et } n_B = N_y \quad \text{en } y = b \quad (10.9)$$

$$r_A = -V_y^* \text{ et } m_A = M_y \quad \text{en } y = -b \quad r_B = V_y^* \text{ et } m_B = -M_y \quad \text{en } y = b \quad (10.10)$$

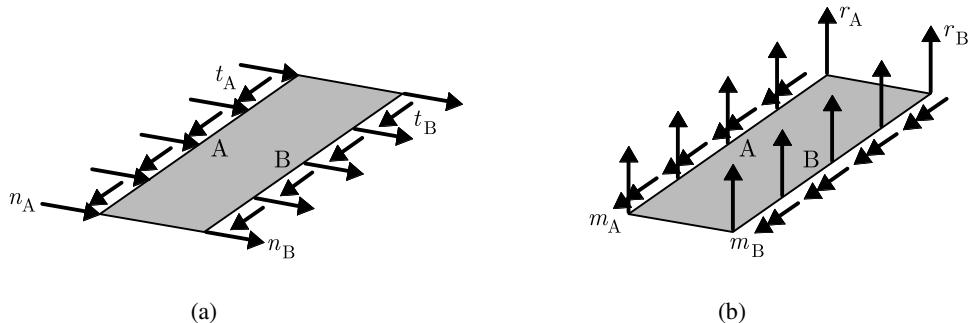


Fig. 10.6 Forces internes le long des bords longitudinaux d'un panneau :
(a) état membranaire ; (b) état flexionnel.

10.5.5 Application des séries de Fourier

Les conditions particulières du panneau permettent d'arriver aisément à une solution en décomposant les champs des déplacements de manière multiplicative et en adoptant, selon la coordonnée longitudinale x , un développement en série de Fourier. On écrit ainsi

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(y) \cos \alpha_i x \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(y) \sin \alpha_i x \quad w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(y) \sin \alpha_i x \quad (10.11)$$

avec $\alpha_i = i\pi/L$ et où u_i , v_i et w_i sont des fonctions, encore indéterminées pour l'instant, de la coordonnée y seule. On reconnaît, dans $w(x, y)$, la solution dite des séries simples de Lévy-Estanave, employée pour la solution des plaques rectangulaires minces (TGC vol. 4).

La fonction sinus apparaît en facteur dans les composantes v et w ; on observe qu'il en est de même pour les efforts intérieurs N_x et M_x (§ 10.5.3), lorsqu'on y introduit (10.11). Or $\sin \alpha_i x$ s'annule en $x = 0$ et $x = L$. Par conséquent, *les conditions aux limites (10.6) sont satisfaites d'emblée, pour chaque terme de la série*, indépendamment de la forme prise par les fonctions $u_i(y)$, $v_i(y)$ et $w_i(y)$.

Les charges q_X , q_Y et q_Z sont écrites en série de Fourier de manière analogue

$$q_X(X) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{Xi} \cos \alpha_i X \quad q_Y(X) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{Yi} \sin \alpha_i X \quad q_Z(X) = \sum_{i=1}^{\infty} q_{Zi} \sin \alpha_i X \quad (10.12)$$

où l'axe X est d'ailleurs parallèle à l'axe x . On observe ci-après que cette décomposition permet d'analyser le problème terme à terme ($i = 1, 2, \dots$) et d'obtenir la solution par sommation (principe de superposition).

10.5.6 Solution analytique

Pour satisfaire aux conditions cinématiques et statiques internes, les déplacements u , v et w doivent vérifier les équations différentielles (10.2) et (10.5). Puisqu'il faut que ces dernières soient satisfaites indépendamment par chaque terme des séries (10.11), on peut travailler sur un terme arbitraire et poser simplement

$$u(x, y) = u_i(y) \cos \alpha_i x \quad v(x, y) = v_i(y) \sin \alpha_i x \quad w(x, y) = w_i(y) \sin \alpha_i x \quad (10.13)$$

La substitution de $w(x, y)$ dans (10.5) conduit à

$$\left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - 2\alpha_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \alpha_i^4 w_i \right) \sin \alpha_i x = 0$$

Cette relation permet de trouver $w_i(y)$ en résolvant l'équation différentielle du quatrième ordre

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - 2\alpha_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \alpha_i^4 w_i = 0$$

qui a pour solution

$$w_i = B_{1i} \operatorname{sh} \alpha_i y + B_{2i} \operatorname{ch} \alpha_i y + B_{3i} \alpha_i y \operatorname{sh} \alpha_i y + B_{4i} \alpha_i y \operatorname{ch} \alpha_i y$$

où les constantes indéterminées B_{1i} , B_{2i} , B_{3i} et B_{4i} dépendent des conditions aux limites sur les bords $y = \pm b$. On écrit l'équation ci-dessus sous la forme matricielle

$$w_i(y) = [\operatorname{sh} \alpha_i y \quad \operatorname{ch} \alpha_i y \quad \alpha_i y \operatorname{sh} \alpha_i y \quad \alpha_i y \operatorname{ch} \alpha_i y] \begin{Bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \\ B_{3i} \\ B_{4i} \end{Bmatrix} = \mathbf{w}_i(y) \mathbf{b}_i \quad (10.14)$$

De manière analogue, la substitution de $u(x, y)$ et $v(x, y)$ dans (10.2) conduit, pour $u_i(y)$ et $v_i(y)$, à un système de deux équations différentielles

$$2\alpha_i^2 u_i - (1 - \nu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - (1 + \nu) \alpha_i \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad 2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} - (1 - \nu) \alpha_i^2 v_i - (1 + \nu) \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0$$

dont la solution est

$$u_i(y) = \mathbf{u}_i(y) \mathbf{a}_i \quad v_i(y) = \mathbf{v}_i(y) \mathbf{a}_i \quad (10.15)$$

où

$\mathbf{a}_i^T = \{A_{1i} \quad A_{2i} \quad A_{3i} \quad A_{4i}\}$ est un vecteur de quatre constantes d'intégration

$\mathbf{u}_i(y) \equiv \mathbf{w}_i(y)$

$$\mathbf{v}_i(y) = [\operatorname{ch} \alpha_i y \quad \operatorname{sh} \alpha_i y \quad \alpha_i y \operatorname{ch} \alpha_i y + \eta \operatorname{sh} \alpha_i y \quad \alpha_i y \operatorname{sh} \alpha_i y + \eta \operatorname{ch} \alpha_i y]$$

$$= \mathbf{w}_i(y) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \eta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\eta = -\frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

Les champs des déplacements étant définis, on peut les introduire dans les formules des efforts intérieurs (10.1), (10.3) et (10.4). On obtient des expressions de la forme suivante :

- pour N_x , N_y , M_x , M_y , V_y et V_y^* : $f(x, y) = f_i(y) \sin \alpha_i x$
- pour N_{xy} , M_{xy} , V_x et V_x^* : $f(x, y) = f_i(y) \cos \alpha_i x$

avec, pour un effort membranaire, $f_i(y) = \mathbf{A}_i(y) \mathbf{a}_i$ et, pour un effort flexionnel, $f_i(y) = \mathbf{B}_i(y) \mathbf{b}_i$ (les matrices lignes \mathbf{A}_i et \mathbf{B}_i n'étant pas explicitées ici).

En exprimant enfin les déplacements et les efforts intérieurs sur les bords longitudinaux ($y = \pm b$), on obtient la valeur des déplacements et des réactions internes (10.7) à (10.10), dont la forme est encore du même type.

Considérons une coque prismatique formée de p panneaux. Chaque panneau comptant huit inconnues (quatre constantes \mathbf{a}_i et quatre constantes \mathbf{b}_i), il faut construire et résoudre $8p$ équations simultanées pour calculer ces inconnues. Ces équations sont obtenues en exprimant l'équilibre et la compatibilité cinématique le long des arêtes. Comme la loi régissant, dans une même équation, la variation longitudinale de toute grandeur est la même ($\sin \alpha_i x$ ou $\cos \alpha_i x$), que la grandeur soit statique (y compris les charges (10.12)) ou cinématique, les équations résultantes ne dépendent que de l'amplitude de ces grandeurs et on peut faire abstraction de la variable x .

Formant et résolvant un système de $8p$ équations pour chaque terme (ou harmonique) du développement en série de la charge, la théorie précédente fournit la solution exacte de la coque prismatique, par sommation de la contribution de tous les termes. En pratique, on limite le nombre de termes lorsqu'une précision donnée est atteinte. Si la charge est régulière (charge uniforme par exemple), quelques termes suffisent ; si la charge est discontinue (force concentrée par exemple), il faut être attentif, en particulier au voisinage de la discontinuité, tant au nombre – beaucoup plus élevé – de termes, nécessaire à obtenir une précision convenable, qu'aux irrégularités éventuelles de la solution.

10.5.7 Solution par la méthode des déplacements

On obtient une résolution plus simple en appliquant la méthode des déplacements. Dans ce but, il faut développer, pour chaque panneau, une *relation force-déplacement* dans laquelle les réactions internes (10.9) et (10.10) s'expriment en fonction des déplacements (10.7) et (10.8). Avec les séries de Fourier, cette démarche se réduit à la relation entre les amplitudes de ces mêmes quantités pour chaque terme particulier i de la série. On peut ainsi travailler dans une coupe transversale d'un panneau et assimiler les deux bords longitudinaux A et B aux deux *nœuds* (en réalité, des *lignes nodales*) d'un élément panneau (fig. 10.7).

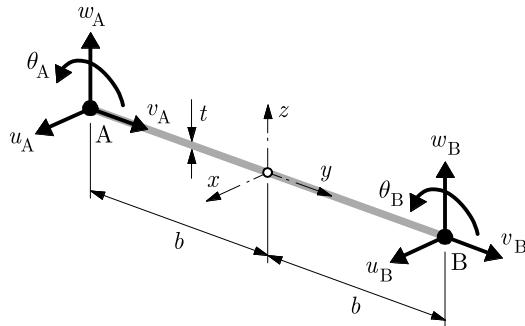


Fig. 10.7 Élément panneau et ses huit degrés de liberté.

Séparant encore l'état membranaire (indice supérieur m) de l'état flexionnel (indice supérieur f), il s'agit d'établir les relations matricielles

$$\mathbf{r}_i^m = \mathbf{k}_i^m \mathbf{d}_i^m \quad \mathbf{r}_i^f = \mathbf{k}_i^f \mathbf{d}_i^f \quad (10.16)$$

où \mathbf{d}_i^m , \mathbf{r}_i^m , \mathbf{d}_i^f et \mathbf{r}_i^f sont les vecteurs déplacements et réactions internes

$$\mathbf{d}_i^m = \begin{Bmatrix} u_{Ai} \\ v_{Ai} \\ u_{Bi} \\ v_{Bi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_i^m = \begin{Bmatrix} t_{Ai} \\ n_{Ai} \\ t_{Bi} \\ n_{Bi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}_i^f = \begin{Bmatrix} w_{Ai} \\ \theta_{Ai} \\ w_{Bi} \\ \theta_{Bi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{r}_i^f = \begin{Bmatrix} r_{Ai} \\ m_{Ai} \\ r_{Bi} \\ m_{Bi} \end{Bmatrix}$$

et où \mathbf{k}_i^m et \mathbf{k}_i^f sont des matrices de rigidité de dimension 4×4 .

Avec (10.15) dans (10.7) et (10.14) dans (10.8), on peut écrire, en ayant recours à la notation $(\bullet)' = \partial(\bullet)/\partial y$,

$$\mathbf{d}_i^m = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \Big|_{y=-b} \\ \mathbf{v}_i \Big|_{y=-b} \\ \mathbf{u}_i \Big|_{y=b} \\ \mathbf{v}_i \Big|_{y=b} \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{G}_i^m \mathbf{a}_i \quad \mathbf{d}_i^f = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_i \Big|_{y=-b} \\ \mathbf{w}'_i \Big|_{y=-b} \\ \mathbf{w}_i \Big|_{y=b} \\ \mathbf{w}'_i \Big|_{y=b} \end{bmatrix} \mathbf{b}_i = \mathbf{G}_i^f \mathbf{b}_i \quad (10.17)$$

Avec (10.15) dans (10.9) et (10.14) dans (10.10), et en utilisant les équations (10.1), (10.3) et (10.4), on a

$$\mathbf{r}_i^m = \begin{bmatrix} -C \frac{1-\nu}{2} (\mathbf{u}'_i + \alpha_i \mathbf{v}_i) \Big|_{y=-b} \\ -C (\mathbf{v}'_i - \nu \alpha_i \mathbf{u}_i) \Big|_{y=-b} \\ C \frac{1-\nu}{2} (\mathbf{u}'_i + \alpha_i \mathbf{v}_i) \Big|_{y=b} \\ C (\mathbf{v}'_i - \nu \alpha_i \mathbf{u}_i) \Big|_{y=b} \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{H}_i^m \mathbf{a}_i \quad (10.18)$$

$$\mathbf{r}_i^f = \begin{bmatrix} D (\mathbf{w}'''_i - (2-\nu) \alpha_i^2 \mathbf{w}'_i) \Big|_{y=-b} \\ -D (\mathbf{w}''_i - \nu \alpha_i^2 \mathbf{w}_i) \Big|_{y=-b} \\ -D (\mathbf{w}'''_i - (2-\nu) \alpha_i^2 \mathbf{w}'_i) \Big|_{y=b} \\ D (\mathbf{w}''_i - \nu \alpha_i^2 \mathbf{w}_i) \Big|_{y=b} \end{bmatrix} \mathbf{b}_i = \mathbf{H}_i^f \mathbf{b}_i$$

Dans (10.17) et (10.18), les matrices sont de dimension 4×4 . Eliminant les constantes \mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i en inversant (10.17), on obtient

$$\mathbf{r}_i^m = \mathbf{H}_i^m (\mathbf{G}_i^m)^{-1} \mathbf{d}_i^m \quad \mathbf{r}_i^f = \mathbf{H}_i^f (\mathbf{G}_i^f)^{-1} \mathbf{d}_i^f$$

ce qui, avec (10.16), fournit les deux matrices symétriques

$$\mathbf{k}_i^m = \mathbf{H}_i^m (\mathbf{G}_i^m)^{-1} \quad \mathbf{k}_i^f = \mathbf{H}_i^f (\mathbf{G}_i^f)^{-1}$$

Combinant l'état membranaire à celui flexionnel, on écrit

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{r}_i^m \\ \mathbf{r}_i^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_i^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_i^m \\ \mathbf{d}_i^f \end{Bmatrix} \quad (10.19)$$

En procédant au partitionnement nodal (TGC vol. 6, chap. 2) des matrices \mathbf{k}_i^m et \mathbf{k}_i^f

$$\mathbf{k}_i^m = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{AA}^m & \mathbf{k}_{AB}^m \\ \mathbf{k}_{BA}^m & \mathbf{k}_{BB}^m \end{bmatrix}_i \quad \mathbf{k}_i^f = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{AA}^f & \mathbf{k}_{AB}^f \\ \mathbf{k}_{BA}^f & \mathbf{k}_{BB}^f \end{bmatrix}_i$$

on peut aisément réorganiser (10.19) en regroupant réactions et déplacements nœud par nœud (on introduit désormais l'indice e de l'élément)

$$\mathbf{r}_{i,e} = \begin{Bmatrix} t_{Ai} \\ n_{Ai} \\ r_{Ai} \\ m_{Ai} \\ t_{Bi} \\ n_{Bi} \\ r_{Bi} \\ m_{Bi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{AA}^m & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{AB}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{AA}^f & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{AB}^f \\ \mathbf{k}_{BB}^m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{BB}^f \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} u_{Ai} \\ v_{Ai} \\ w_{Ai} \\ \theta_{Ai} \\ u_{Bi} \\ v_{Bi} \\ w_{Bi} \\ \theta_{Bi} \end{Bmatrix} = \mathbf{k}_{i,e} \mathbf{d}_{i,e} \quad (10.20)$$

où $\mathbf{k}_{i,e}$ est la *matrice de rigidité d'un panneau*, en axes locaux, de dimension 8×8 . Pour passer aux axes globaux (X, Y, Z), il suffit d'effectuer une rotation d'angle α autour de l'axe longitudinal, via la matrice (fig. 10.8)

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_\alpha \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pour obtenir (TGC vol. 6, chap. 2)

$$\mathbf{k}_{i,e(\text{global})} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{i,e} \mathbf{T}_e \quad (10.21)$$

Connaissant la matrice de rigidité (10.21), on résout de manière habituelle, par la méthode des déplacements. Les panneaux n'étant pas chargés, il n'y a pas de vecteurs charges issus des panneaux, mais seulement des charges nodales. Après assemblage (TGC vol. 6, sect. 2.7), le système linéaire

$$\mathbf{K}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{F}_i$$

comporte $4n$ inconnues pour n nœuds arêtes, soit à peu près la moitié du nombre d'inconnues de la méthode analytique.

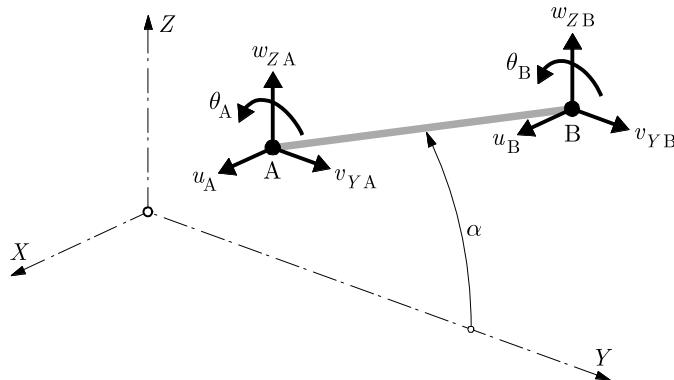


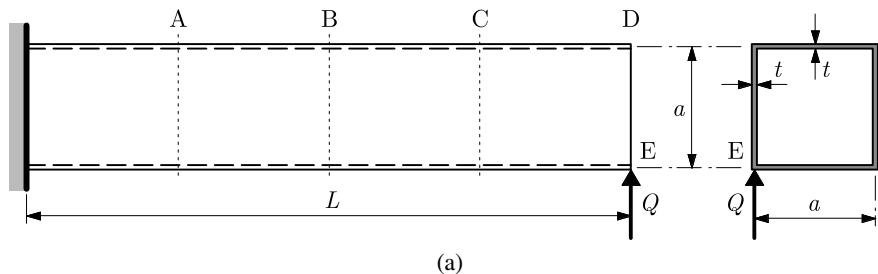
Fig. 10.8 Rotation d'angle α autour de X (les degrés de liberté u_A , u_B , θ_A et θ_B ne sont pas affectés : $u_{XA} \equiv u_A$, etc.).

10.6 Exercice

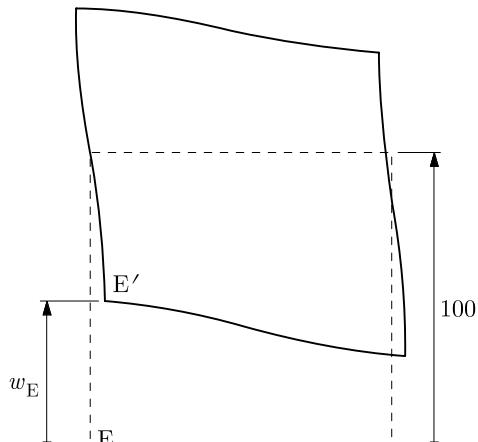
10.6.1 Une structure plissée, en forme de poutre tubulaire prismatique, à section carrée et à paroi mince d'épaisseur constante, est chargée d'une force concentrée Q agissant au coin E de l'extrémité libre (fig. Ex.10.6.1a). Il n'y a aucun diaphragme. Les unités sont le cm et le kN.

On donne : $E = 21 \cdot 10^6$; $\nu = 0,15$; $L = 500$; $a = 100$; $t = 8$; $Q = 1\,000$.

- 1) Calculer cette structure par un programme de bandes finies ou d'éléments finis ; contrôle : le déplacement associé à Q vaut $w_E \approx 5,1$.
- 2) Dans les sections droites A, B, C et D, distantes de $L/4$, comparer les résultats numériques avec ceux issus d'un traditionnel calcul en poutre à section droite indéformable (contraintes normales et tangentielles ; flèches et rotations) ; observer la flexion transversale des parois, due à l'absence de diaphragme, que la théorie de poutre ne peut représenter.
- 3) Etudier les déplacements et la distorsion progressive des sections A, B, C et D ; expliquer l'allure de la déformée de la section D (fig. Ex.10.6.1b) et, en particulier, pourquoi les âmes ont tendance à tourner dans le sens contraire à celui du moment de torsion résultant de l'action excentrée de Q .



(a)



(b)

Fig. Ex. 10.6.1 Structure tubulaire sans diaphragme : (a) géométrie et charge ;
 (b) déformée de la section d'extrémité D (déplacements amplifiés 10 fois).

11 Méthodes numériques

11.1 Introduction

L'analyse numérique des coques et structures plissées peut se faire par différences finies, éléments finis ou éléments de frontière, voire par séries. Les avantages et potentialités de la *méthode des éléments finis* sont tels que les autres méthodes sont peu utilisées, sauf dans certains cas particuliers. La méthode des éléments finis joue en effet un rôle phare dans l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, puisqu'elle seule aujourd'hui est capable de résoudre ce type de problème en toute généralité. Elle est donc un auxiliaire des plus précieux pour l'ingénieur.

Le but de ce chapitre est de donner une vue d'ensemble de l'emploi de la méthode des éléments finis, et des problèmes qui lui sont attachés, pour le calcul numérique des coques. Il ne s'agit nullement d'être exhaustif sur le sujet : aucune formulation n'est abordée, aucun élément fini n'est développé, aucun algorithme n'est présenté. Ce chapitre décrit, selon les théories auxquelles les éléments finis se rattachent, les propriétés générales des éléments utilisables pour l'analyse des coques, ainsi que leurs qualités et défauts, certains problèmes de modélisation et discrétilisation, et quelques tendances actuelles.

On se limite aux éléments finis de caractère général ; ceux relevant de techniques particulières (éléments pour coques de révolution, technique des bandes finies, etc.) ne sont que mentionnés. On reste dans le domaine linéaire et on suppose que les bases de la méthode des éléments finis sont connues (TGC vol. 6).

11.2 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis

Les avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis se manifestent de façon particulièrement aiguë dans le domaine du calcul des coques.

Intrinsèquement, la méthode présente les avantages suivants (TGC vol. 6, sect. 13.2) :

- au niveau des éléments finis, leur taille relativement petite et leur forme géométrique simple permettent aussi de choisir simplement et rationnellement les fonctions d'interpolation décrivant leur comportement ;

- au niveau de la structure à analyser, la complexité des formes géométriques, des propriétés mécaniques et physiques, des charges et des conditions aux limites ne présente plus guère de problème ;
- la possibilité de résoudre effectivement cette complexité à partir d'un petit nombre d'éléments finis de type différent justifie l'investissement nécessaire au développement de codes de calcul très évolués et très généraux ;
- la méthode a en soi un caractère physique attrayant ;
- on peut estimer l'erreur commise en tout point, voire la maintenir inférieure à un certain seuil de façon automatique.

L'examen des cinq points ci-dessus montre que le second, ainsi que le troisième, sont décisifs : devant la complication géométrique de la plupart des structures en coques (fig. 11.1), comportant par ailleurs souvent d'autres éléments structuraux, le recours aux éléments finis s'avère la seule voie possible d'analyse. Pour l'ingénieur, le quatrième point est également important : lors de la modélisation et discréttisation des structures en coques, le sens physique est un guide précieux, voire indispensable, tant pour préparer l'analyse que pour juger des résultats obtenus.

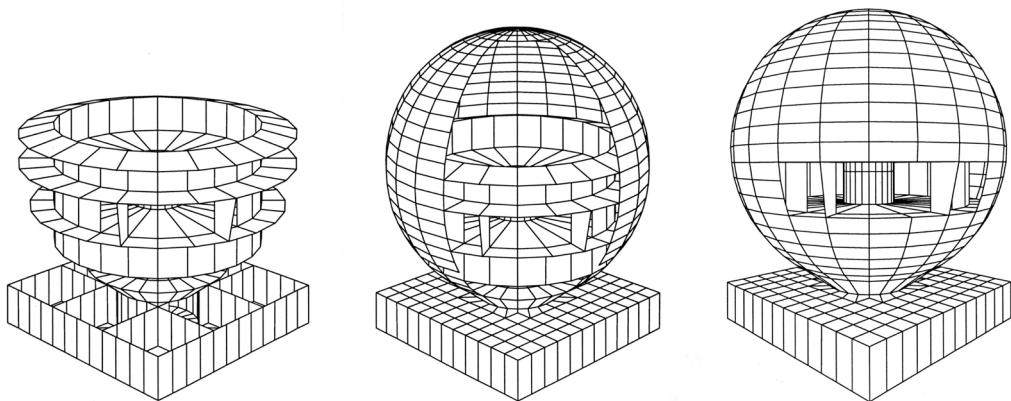


Fig. 11.1 Discréttisations du Planétarium de la Cité des Sciences à Tunis.
(Source : Greisch Ingénierie, B 4031 Liège, Belgique.)

Par contre, pour le premier point, la forme courbe des éléments complique fortement la formulation en liaison avec l'interpolation. Les éléments de coque sont aussi très sensibles à la présence de mécanismes, à divers types de verrouillage et à l'imprécision due à la distorsion. Aujourd'hui encore, la mise au point d'un élément de coque robuste et précis reste un défi, surtout lorsqu'on s'écarte du domaine linéaire. De même, concernant le cinquième point, rien de bien fiable n'existe encore dans le domaine des coques.

D'un autre côté, la méthode présente aussi quelques points faibles, qu'il serait faux de sous-estimer :

- des difficultés de modélisation et discréttisation peuvent apparaître ;
- le volume et la vérification des données et des résultats peuvent devenir difficiles à maîtriser ;

- les programmes sont, pour les non-initiés, des boîtes noires ; leur utilisation inconsidérée peut être dangereuse ;
- la méthode ouvre la porte à la résolution de problèmes complexes qui peuvent échapper à la maîtrise de l'utilisateur ; elle donne l'impression de pouvoir tout calculer ; elle peut être source d'erreurs diverses et parfois graves, qu'il est souvent difficile de détecter ;
- une informatique puissante est nécessaire ;
- le développement et, surtout, la maintenance d'un programme performant et sûr requièrent énormément de travail.

Les cinq derniers points ne sont pas spécifiques aux structures en coques, encore que le quatrième doive retenir l'attention de l'utilisateur d'un code de calcul. On oublie trop souvent que la méthode des éléments finis ne donne qu'une résolution approximative des équations du modèle mathématique choisi pour décrire la structure. On croit pouvoir attendre plus de la méthode, alors qu'il ne s'agit que d'un outil. On voudrait lui faire confiance, alors que la plus grande prudence est ordinairement de mise. Pire, on néglige d'analyser la valeur des résultats qu'elle fournit.

Les structures en coques sont surtout concernées par le premier point, où de très nombreux problèmes et pièges apparaissent. Leur maîtrise est loin d'être évidente. Vu son importance, ce point est abordé à la section 11.8.

En conclusion, l'ingénieur doit garder, face à un calcul par éléments finis, un jugement sain et réfléchi. Certes, l'outil de calcul est remarquable en possibilités, mais une confiance aveugle dans les résultats d'un calcul numérique est dangereuse et déplacée. Vis-à-vis du comportement réel, insaisissable dans le détail, on observe toujours une certaine différence. C'est ainsi par exemple que le béton armé n'est pas élastique linéaire, que la géométrie réelle n'est pas exactement celle du calcul, que les actions sont mal connues, et que certaines formes de coques, non analytiques (chap. 1), ne peuvent pas être modélisées exactement en éléments finis.

11.3 Exigences communes aux éléments finis

Les considérations qui suivent s'adressent avant tout aux éléments du *modèle déplacement*, qui sont les plus répandus, et à ceux du *modèle mixte* dont la formulation se rapproche du modèle déplacement. Quelle que soit la structure étudiée, il faut s'assurer, avant tout calcul, que l'élément fini utilisé converge vers la *solution exacte* lorsqu'on discrétise toujours plus finement. La solution exacte est celle résultant de la *théorie* sur base de laquelle l'élément fini est construit. Parmi les multiples variations possibles des théories de coque, ce point est capital, mais il est rarement révélé à l'utilisateur d'un programme commercial.

Pour garantir la convergence, un élément fini doit pouvoir représenter les *modes rigides* et les *déformations constantes* ; de plus, il doit être *conforme*, c'est-à-dire assurer la parfaite continuité des déplacements représentatifs aux frontières (critères de convergence ; TGC vol. 6, chap. 5).

Dans les éléments finis de coque, il est souvent très difficile de satisfaire ces exigences. La plus délicate est celle de conformité aux frontières. Dans certaines circonstances, il est tout simplement impossible d'y satisfaire. Elle n'est toutefois pas impérative : les éléments *non conformes* assurent également la convergence vers la solution exacte s'ils satisfont au *patch test* (TGC vol. 6, sect. 5.3). Concrètement, l'excès de rigidité propre au modèle déplacement est heureusement compensé par un

certain assouplissement dû aux légères discontinuités aux frontières. Malheureusement, *il n'existe pas de patch test pour les coques* (sauf pour certaines géométries particulières). La convergence découle alors d'une expérimentation numérique intensive (§ 11.4.3).

11.4 Théories et éléments finis

11.4.1 Théories

Le chapitre 2 a présenté une version particulière (dans les lignes de courbure principale) de la théorie la plus simple applicable aux coques minces, due à Love. Cette théorie a été généralisée et confirmée par Koiter et, dans le domaine des coques minces, on parle de *théorie de Love-Koiter* (1888-1960 environ).

Une théorie semblable, adaptée aux coques d'épaisseur modérée, généralisant la théorie des plaques d'épaisseur modérée de Mindlin, a été mise sur pied par Reissner et Naghdi (1940-1970 environ). La *théorie de Reissner-Naghdi* tient compte, encore imparfaitement, de la déformation par effort tranchant. Lorsqu'on s'inspire des hypothèses de base de la théorie des plaques d'épaisseur modérée, pour les appliquer aux éléments finis de coque (§ 11.7.3), on parle volontiers de *théorie de Reissner-Mindlin*.

Ces deux théories générales sont décrites en coordonnées curvilignes tracées sur la surface moyenne. Il en existe de nombreuses variantes. Il est aussi possible d'exprimer ces théories en coordonnées cartésiennes, mais cette démarche n'est pas naturelle et très peu pratiquée.

Par contre, dans le domaine des *coques surbaissées*, on peut formuler des théories particulières simplifiées, qu'il est intéressant d'exprimer en composantes tant curvilignes que cartésiennes. Pour les coques minces, parmi les nombreuses théories proposées, celles de *Donnell* (coordonnées curvilignes) et *Marguerre* (coordonnées cartésiennes), les plus utilisées, sont exposées brièvement au chapitre 3. Pour les coques d'épaisseur modérée, de semblables théories particularisées existent, sans être nommément attribuées, ni peut-être parfaitement formulées.

11.4.2 Types d'éléments finis

Pour l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, on peut utiliser des éléments finis de coque d'épaisseur mince ou modérée des types suivants :

- éléments de coque à surface moyenne courbe (à forte courbure en général, surbaissée parfois), basés sur l'une des théories générales (Love-Koiter ou Reissner-Naghdi) ;
- éléments de coque surbaissée, basés sur une théorie de coque surbaissée (Donnell, Marguerre, etc.) ;
- éléments plans, dits plaques-membranes, dont l'état flexionnel est basé sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff) ou d'épaisseur modérée (Mindlin) ;
- éléments dits du type tridimensionnel dégénéré, ordinairement courbes, se rattachant à une formulation théorique de type Reissner-Mindlin.

La conformité est de type C^1 en coque mince ; elle exige que soient transmis en chaque point des frontières le *déplacement de translation* et la *rotation de la normale autour de la tangente au bord* (grandeurs (2.56), § 2.10.2). La conformité est de type C^0 en coque d'épaisseur modérée ; les déplacements à transmettre sont ceux de *translation* et *rotation de la normale* (rotation autour de la tangente et de la perpendiculaire au bord). Il en résulte, dans les deux cas, qu'en un nœud d'un élément fini peuvent exister jusqu'à cinq inconnues : les trois composantes du déplacement de translation et les deux composantes, dans le plan tangent à la surface moyenne, de la rotation de la normale (fig. 11.2). Il n'y a aucune inconnue de rotation autour de la normale à la coque.

Les éléments du type tridimensionnel dégénéré forment, vis-à-vis de la théorie, une classe particulière d'éléments finis (§ 11.7.3).

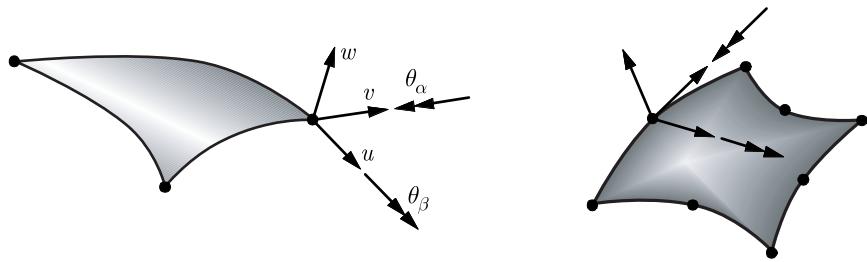


Fig. 11.2 Inconnues cinématiques d'un élément fini de coque en coordonnées curvilignes (dans le plan tangent).

Remarques

La discrétisation d'une coque en éléments finis soulève aussi un important problème de géométrie : le plus souvent, la représentation de la forme de la surface moyenne n'est qu'approximative (§ 11.8.2).

Les rotations de la normale sont, en conformité C^1 , déduites du champ des translations ; elles sont assimilables à la rotation des tangentes à la coque ; en conformité C^0 , les rotations sont des grandeurs autonomes.

En accord avec le chapitre 2, les composantes des degrés de liberté du type rotation sont les rotations « directes » et sont dessinées comme telles (fig. 2.3 et 11.12 ; TGC vol. 6, § 8.7.2).

11.4.3 Contrôle d'un élément fini de coque

Presque tous les éléments finis de coque sont non conformes. La convergence ne pouvant être vérifiée par le *patch test*, on peut procéder de la manière suivante pour s'assurer de la valeur d'un élément fini :

- tester les *modes rigides* (de rotation surtout) sur un élément et *sur un groupe d'éléments* ;
- tester, sur un groupe d'éléments tous situés dans un même plan (courbure nulle), les *déformations constantes* des états membranaire et flexionnel (*patch test classique*) ;
- tester la sensibilité au *verrouillage* (de membrane et de cisaillement) ;
- tester la sensibilité aux divers *schémas d'intégration numérique* disponibles ;

- réaliser quelques *tests simples* dont la solution analytique est *connue* (sphère sous pression uniforme ; effets de bord d'une coque cylindrique ; etc.) ;
- réaliser divers *tests types reconnus*, contrôlant le comportement membranaire dominant, celui flexionnel dominant, l'effet de la courbure, les conditions aux limites et les charges.

Les problèmes relatifs aux modes rigides et au verrouillage nécessitent quelques commentaires.

Examinons le cas d'une coque cylindrique circulaire à laquelle on impose, en coordonnées curvilignes, le déplacement $w = C = \text{cste}$ (fig. 11.3a). Il en résulte une traction circonférentielle uniforme dans toute la coque, et non pas un mode rigide. Pour obtenir ce dernier, il faut imposer au cylindre le déplacement $w_Z = C$ en axes cartésiens (fig. 11.3b). L'équivalent en coordonnées curvilignes est

$$u = 0 \quad v = C \sin \varphi \quad w = C \cos \varphi$$

ce qui signifie qu'il faudrait introduire des fonctions trigonométriques au niveau des éléments pour représenter les modes rigides.

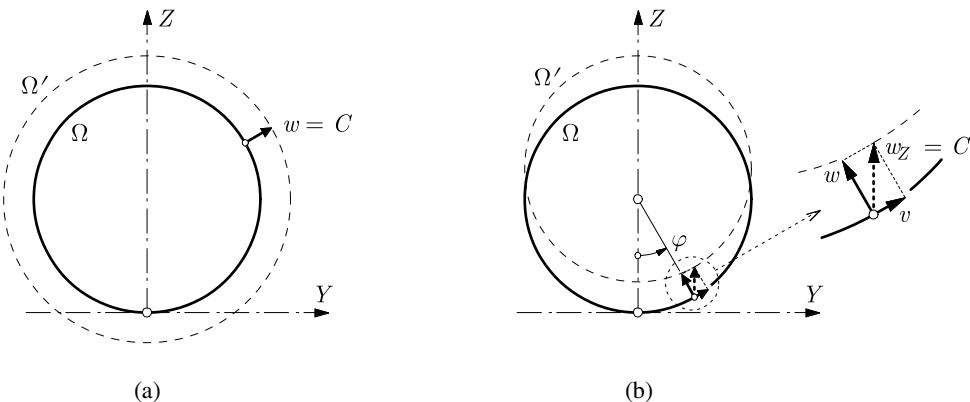


Fig. 11.3 Coque cylindrique (coupe) : (a) $w = C$ en coordonnées curvilignes ;
(b) $w_Z = C$ en coordonnées cartésiennes.

Ainsi, avec les approximations polynomiales usuellement employées pour interpoler le champ des déplacements, on voit qu'il est impossible de représenter les modes rigides en coordonnées curvilignes. On ne peut que s'en approcher asymptotiquement, et ce d'autant mieux que les polynômes d'interpolation possèdent un nombre suffisant de termes du développement en série des fonctions trigonométriques (au moins cubique).

De manière générale, la représentation des modes rigides, *surtout ceux de rotation*, est un problème délicat des éléments finis de coque, même lorsqu'on travaille en coordonnées cartésiennes. Il arrive fréquemment que ces modes ne soient représentés que de façon approchée. Un calcul des six premières valeurs propres de la matrice de rigidité de l'élément fini permet de s'en rendre compte (TGC vol. 6, § 7.6.5).

Le verrouillage (*locking*) est un phénomène de surrigidité artificielle de l'élément fini qui apparaît lorsque plusieurs composantes du champ des déplacements interagissent de façon déséquilibrée dans l'expression d'une (ou plusieurs) composantes de la déformation, après interpolation. Il en existe deux types :

- le *verrouillage de membrane* est propre aux éléments courbes ; il se développe lorsque courbures et dilatations interagissent ; on l'appelle aussi *verrouillage M-N* (TGC vol. 6, remarque 9.5) ;
- le *verrouillage de cisaillement* se manifeste au niveau des déformations de courbure et de glissement (moyen) dans les éléments d'épaisseur modérée ; on parle aussi de *verrouillage M-V* (TGC vol. 6, sect. 9.3 et § 9.5.3).

Les éléments finis de coque mince ne sont soumis qu'au premier type ; les éléments de coque d'épaisseur modérée peuvent souffrir des deux types. Le verrouillage est très pénalisant pour la convergence et difficile à combattre.

Pour tester un élément fini contre ce phénomène, il suffit de faire un test bidimensionnel de flexion pure. Pour le verrouillage de membrane, on teste un élément courbe : l'effort normal doit être nul ; pour le verrouillage de cisaillement, on procède sur un élément plan : aucun effort tranchant ne doit apparaître.

11.4.4 Bref historique

La première application de la méthode des éléments finis aux coques a été faite en 1961 avec un élément plaque-membrane ; mais la discrétisation était trop grossière et les résultats décevants.

Le premier élément fini de « coque » fut un tronc de cône pour coques de révolution à chargement de révolution (1963). En 1965, des programmes très généraux pour coques de révolution à chargement quelconque étaient couramment utilisés (impulsion des programmes spatiaux SATURN-APOLLO).

Le premier élément fini courbe pour coque de géométrie arbitraire fut proposé en 1966. Jusqu'en 1970 environ, de nombreux essais eurent lieu avec des éléments plaques-membranes et des éléments courbes. Mais on se heurta aux difficultés théoriques et numériques : théorie des coques, conformité aux frontières, modes rigides, etc. En 1970, différences finies et éléments finis étaient encore en compétition.

Il faut attendre 1975 environ pour bien comprendre, au niveau de la méthode des éléments finis, les différences entre coques à forte courbure et coques surbaissées, ainsi qu'entre coordonnées curvilignes et coordonnées cartésiennes.

Un quart de siècle plus tard, malgré des progrès considérables, il n'existe toujours pas d'élément fini de coque qui ne présente l'une ou l'autre faiblesse : la recherche, dans ce domaine, reste ouverte.

11.5 Éléments de coque mince

11.5.1 Éléments basés sur la théorie des coques à forte courbure

La formulation d'éléments basés sur une théorie de coque à forte courbure est à la fois la plus élégante, la plus délicate et la plus difficile. Partant de la théorie de Love-Koiter, on peut exprimer le champ des déplacements de deux façons différentes, en fonction (fig. 11.4)

- des composantes curvilignes u , v et w des déplacements de la surface moyenne, elle-même définie par le rayon vecteur $\mathbf{x}(\alpha, \beta)$;
- des composantes cartésiennes u_X , v_Y et w_Z des déplacements de la surface moyenne, définie semblablement par une fonction $Z = Z(X, Y)$ par rapport à un plan (X, Y) de référence.

La première solution permet de réaliser la conformité aux frontières, mais ne permet pas une représentation exacte des modes rigides. La seconde conduit à une surcompatibilité aux frontières (dans les dérivées des déplacements), limitative et peu pratique d'emploi, mais permet de représenter exactement les modes rigides.

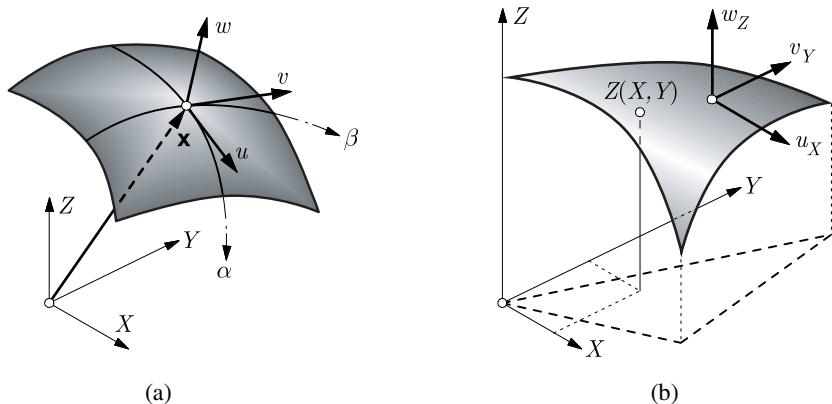


Fig. 11.4 Composantes du champ des déplacements :
(a) coordonnées curvilignes ; (b) coordonnées cartésiennes.

Dans ces deux cas, l'exacte continuité aux frontières exige que la *rotation de la normale*, ou encore la rotation de la tangente transversale à la frontière, soit continue. Or cette rotation n'est pas égale à la simple pente du déplacement transversal w , car elle dépend aussi des rayons de courbure (équations (2.13), § 2.6.1). Pour une coque cylindrique, où une génératrice serait frontière par exemple (fig. 11.5), la rotation de la tangente à la directrice vaut (seconde équation (7.8) ou (8.4))

$$\theta_\varphi = \frac{1}{r} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \frac{v}{r} + \frac{\partial w}{\partial s} \quad (11.1)$$

et non pas simplement (comme dans les plaques et poutres droites)

$$\theta_\varphi = \frac{\partial w}{\partial s} \quad (11.2)$$

d'autant plus que le rayon de courbure peut varier brusquement d'un élément à l'autre.

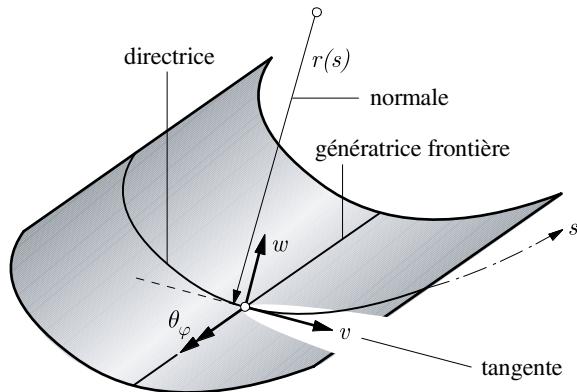


Fig. 11.5 Rotation θ_φ de la normale ou de la tangente.

Les éléments finis construits (par simplicité) sur la valeur erronée de la rotation produisent des résultats incorrects lorsque la coque présente des variations brusques du rayon de courbure (raccords tangentiels de coques différentes par exemple ; fig. 11.6).

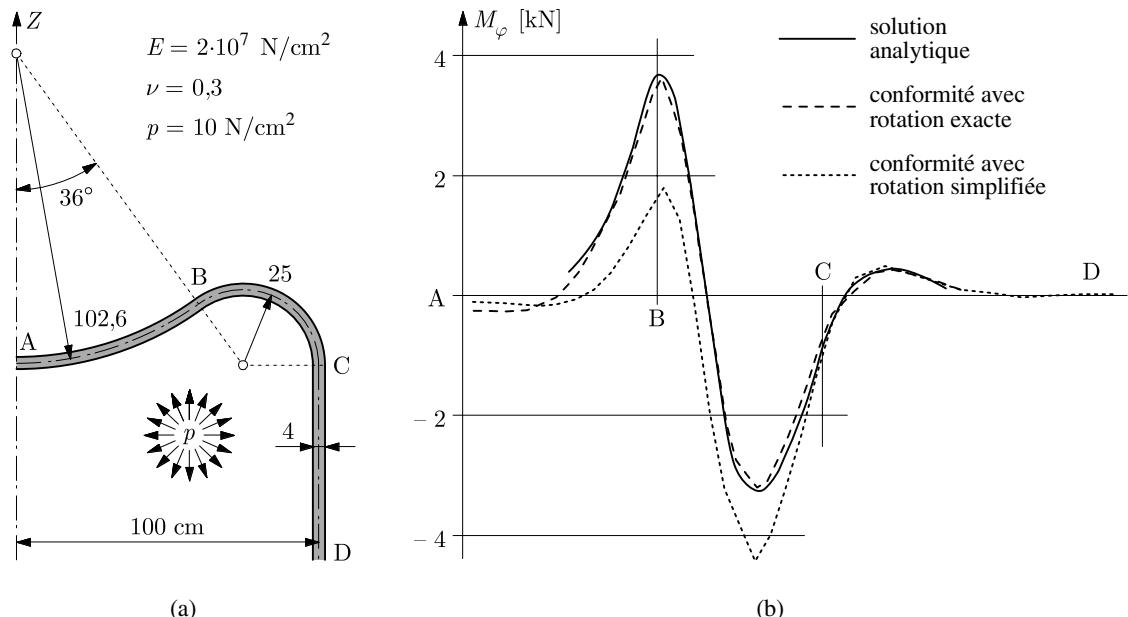


Fig. 11.6 Fond courbe d'un récipient de révolution sous pression intérieure : (a) méridien ; (b) moments M_φ . (Source : S. Idelsohn, *Analyse statique et dynamique des coques par la méthode des éléments finis*, thèse de doctorat, LTAS, Université de Liège, 1974.)

D'un point de vue géométrique, la formulation curviligne permet, si la surface peut être décrite sous forme paramétrique, de discréteriser la surface moyenne avec exactitude, en particulier sans introduire de discontinuité de la pente aux frontières des éléments. La formulation cartésienne, par contre, restreint la description de la surface moyenne à une forme polynomiale (forme qui, par ailleurs, doit être contenue dans l'interpolation des déplacements pour garantir la représentation des modes rigides).

Au reste, les éléments correctement formulés convergent vers la solution exacte des coques minces, au sens de la théorie et des hypothèses de Love. Ils sont certainement élégants et précis, mais leur formulation est ardue et complexe. Ils sont aussi, d'un point de vue pratique, d'un emploi laborieux (spécification très lourde des données). Ils nécessitent souvent une description analytique de la coque. De plus ils ne se prêtent pas, ou mal, au calcul des jonctions de coques (tangente discontinue). Ils ne résolvent donc efficacement que des problèmes simples ou académiques et ne sont pas recommandés pour l'usage pratique.

Remarques

Les éléments finis décrits ci-dessus ont été parmi les premiers appliqués au calcul des coques. Aucun n'a survécu...

L'extension de tels éléments dans le domaine non linéaire semble quasiment impossible.

En définissant la géométrie d'un élément fini comme *surbaissée*, on peut introduire les hypothèses que cette géométrie induit (§ 3.4.1) dans la théorie de Love-Koiter, afin d'avoir une formulation théorique plus simple. Dans la convergence h , la géométrie des éléments finis, qui deviennent toujours plus petits, tend effectivement vers la géométrie surbaissée. De tels éléments ont été développés ; plus rationnels que les précédents, ils restent toutefois assez compliqués et on ne les rencontre pas dans les programmes commerciaux.

11.5.2 Eléments basés sur une théorie de coque surbaissée

Au vu des difficultés précédentes, on a cherché des simplifications.

Considéré *isolément*, un élément fini, de par sa taille, est davantage à l'image d'une coque surbaissée – même si l'ensemble de la coque ne l'est pas (fig. 11.7) – que d'une coque à forte courbure. Or les théories des coques surbaissées sont nettement plus simples que la théorie de Love ; en particulier, les rotations sont assimilables aux pentes de la composante transversale w de la déformée (on peut utiliser (11.2) dans la figure 11.5 par exemple), ce qui simplifie fortement les problèmes de conformité. On peut alors construire des éléments finis de coque surbaissée selon les deux théories décrites au chapitre 3 (*Donnell* en composantes curvilignes et *Marguerre* en composantes cartésiennes).

La solution *théorique* d'un problème de coque surbaissée est évidemment différente de celle du même problème exprimé en coque à forte courbure ; plus la coque est surbaissée, plus cette différence s'atténue. Si l'entier d'une coque surbaissée ainsi que les éléments finis la discréterisant sont rapportés au même plan de référence, la solution numérique converge vers la solution théorique.

Par contre, si chaque élément fini est rapporté à son propre plan de référence (fig. 11.7), le résultat peut être totalement différent. Que penser en effet de la solution d'une coque à forte courbure modélisée et discréterisée par un maillage d'éléments finis formulés en coque surbaissée ? La réponse, a priori surprenante, est la suivante :

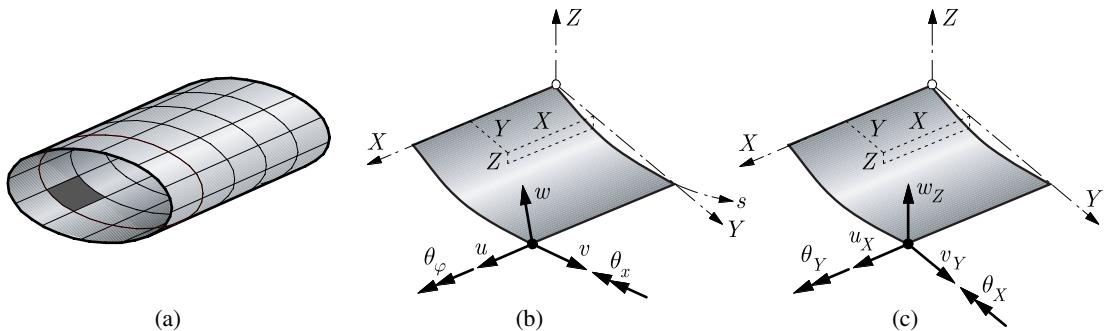


Fig. 11.7 Élément fini de coque surbaissée : (a) maillage d'une coque cylindrique ; (b) composantes curvilignes ; (c) composantes cartésiennes ((X, Y) : plan de référence de l'élément).

- les éléments finis construits sur la base d'une théorie exprimée en composantes curvilignes des déplacements (Donnell) convergent vers la solution des coques surbaissées ; *ils ne s'appliquent donc qu'aux seules coques surbaissées* ;
- les éléments finis développés sur la base d'une théorie formulée en composantes cartésiennes des déplacements (Marguerre) convergent vers la solution exacte de Love, que la coque soit surbaissée ou non ; on peut donc les appliquer au calcul de toutes les coques.

Ces résultats, d'abord observés lors de l'expérimentation numérique, s'expliquent ainsi : dans la théorie de Donnell, la seconde hypothèse néglige les composantes u et v du déplacement dans l'expression des rotations et des courbures, expressions qui contiennent aussi les rayons de courbure. Quand la taille des éléments finis tend vers zéro (convergence h), ni les déplacements u et v , ni les courbures ne tendent vers zéro. La formulation des éléments finis reste donc, asymptotiquement, de type approximatif. Dans la théorie de Marguerre, seule l'hypothèse des pentes faibles est évoquée ; ces pentes tendent effectivement vers zéro quand la taille des éléments finis diminue toujours plus, mais les courbures ne sont pas affectées. On tend ainsi vers la solution exacte des coques de Love. La figure 11.8 résume la situation.

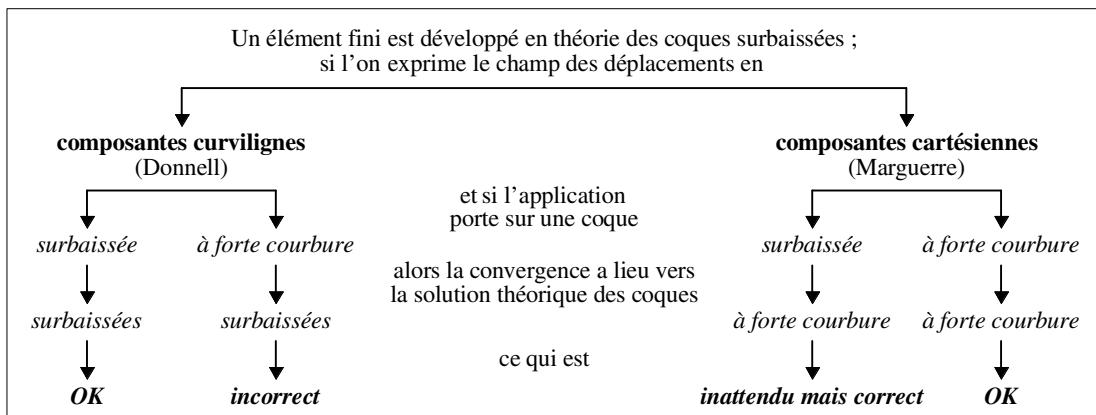


Fig. 11.8 Convergence des éléments de coque surbaissée (*shallow shell elements*).

Il est clair que, dans tous les cas, la solution de Love constitue la référence. La figure 11.9 montre le calcul d'une voûte cylindrique autoportante relativement surbaissée, sous son poids propre (flèche w_Z au centre du bord libre, en valeur absolue). La *solution exacte en coque surbaissée*, selon Donnell, obtenue par voie analytique, fournit $w_Z = 3,703$ cm et les éléments de coque surbaissée (composantes curvilignes) y convergent. La *solution exacte en théorie de Love* est inconnue, mais les éléments à forte courbure, les éléments surbaissés construits en composantes cartésiennes (Marguerre), ainsi que les éléments plaques-membranes (sect. 11.6), convergent tous vers la valeur commune $w_Z \approx 3,6$ cm, inférieure d'environ 3 % à la solution analytique de la coque surbaissée.

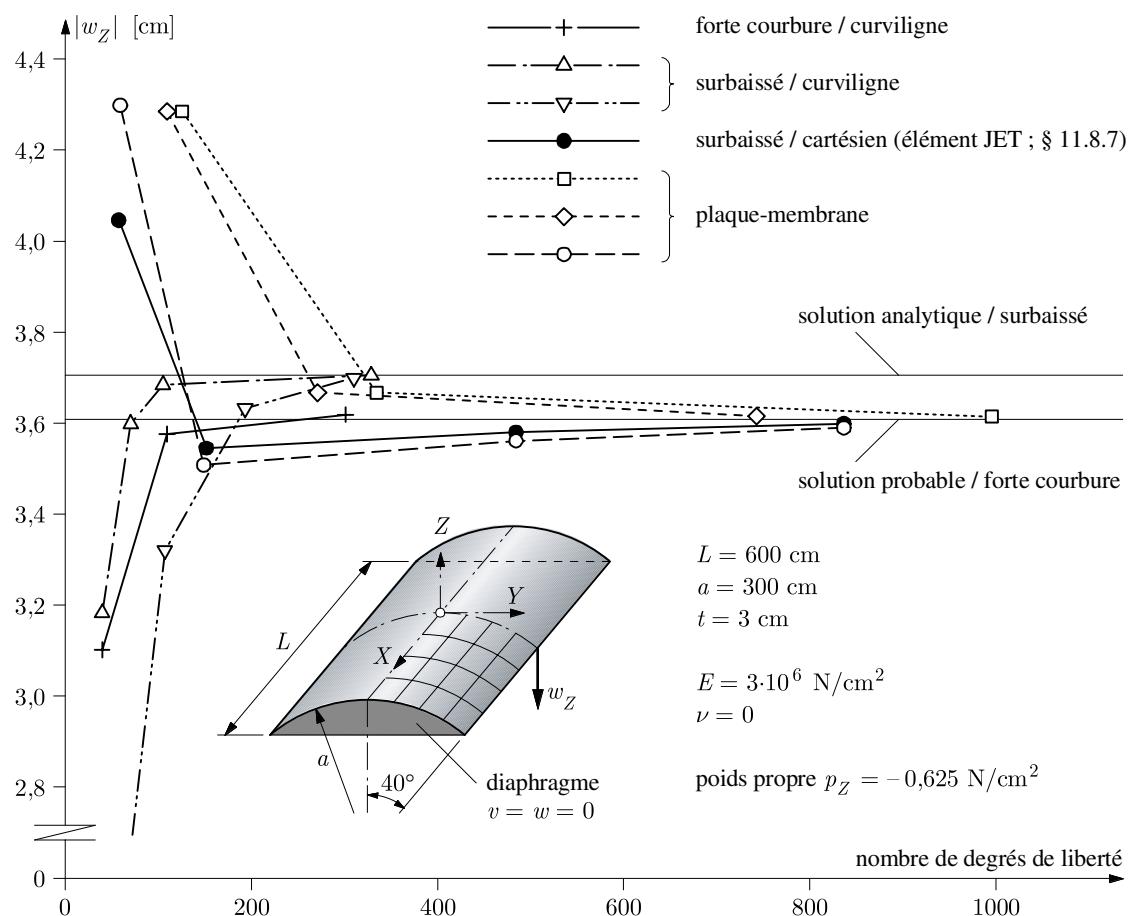


Fig. 11.9 Coque cylindrique autoportante sous poids propre : convergence de la flèche w_Z au centre du bord libre.

En général, les éléments finis de coque surbaissée sont exprimés en composantes cartésiennes (Marguerre). Cette option présente de nombreux avantages : bon compromis entre deux théories – l'une trop lourde (Love) et l'autre simplifiée à l'extrême (plaque-membrane) – permettant de conserver la courbure, formulation simple, modes rigides exactement représentés ; munis des degrés de liberté classiques (translations et rotations), ils acceptent les intersections de coque et les jonctions aux poutres et raidisseurs. Ils sont très populaires, car ils peuvent cumuler *simplicité, précision, sûreté et économie*, qui sont des critères décisifs pour l'utilisation pratique intensive. Toutefois, ils sont *non conformes* et peuvent poser de délicats problèmes de verrouillage membranaire (sect. 11.4.3), de modélisation et de discréétisation (sect. 11.8).

11.6 Eléments plaques-membranes minces

Il est très simple, dans un élément fini plan, de combiner un champ membranaire à un champ flexionnel (TGC vol. 6, sect. 9.7). On obtient un *élément plaque-membrane*, aussi appelé *élément plan de coque* (fig. 11.10).

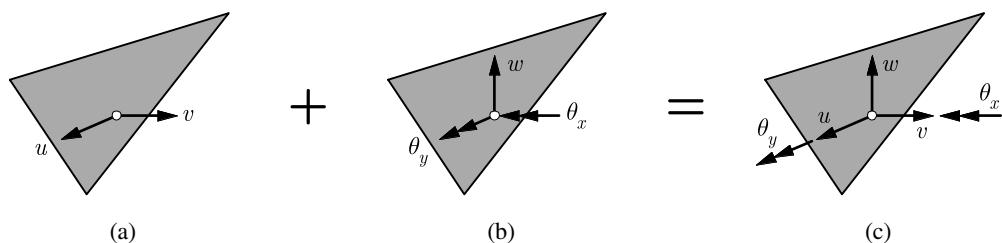


Fig. 11.10 Élément plaque-membrane : (a) état membranaire (état plan de contrainte) ; (b) état flexionnel (plaque de Kirchhoff) ; (c) combinaison (élément plan de coque).

L'analyse d'une coque avec de tels éléments introduit nécessairement une approximation géométrique assez grossière, car on discréétise la structure par un ensemble de *facettes planes* (on parle parfois de *coque à facettes* ; fig. 11.11). Cette discréétisation fait apparaître des *arêtes* qui peuvent perturber la réponse du modèle numérique (arêtes artificielles, moments parasites, petits angles dièdres, etc. ; sect. 11.8). Il est alors recommandé d'utiliser beaucoup d'éléments afin de respecter valablement la géométrie réelle courbe.

Par contre, ce type d'éléments se prête à merveille au calcul des structures plissées et des coques prismatiques.

Avec les éléments plaques-membranes, on n'assure pas la conformité aux frontières (sect. 11.8), mais on représente exactement les modes rigides. Lorsqu'on raffine toujours plus le maillage, *on converge vers la solution exacte des coques à forte courbure* (Love ; fig. 11.9), car l'élément plan est la limite d'une coque surbaissée exprimée en coordonnées cartésiennes. (On converge également vers la solution exacte d'une structure plissée.) Mais cette convergence est *plus lente* que celle réalisée avec des éléments courbes. Il convient donc de mailler finement et, par suite, on peut se contenter d'utiliser des éléments simples (degré peu élevé).

Géométriquement, on peut représenter aisément toute forme de coque, les jonctions, trous et raidisseurs ; les données sont d'une grande simplicité puisqu'il suffit de tracer un réseau de triangles et quadrilatères sur la structure.

Ces avantages considérables, liés à une simplicité remarquable de la formulation, rendent ces éléments populaires, efficaces et très attrayants pour le calcul pratique, en dépit de quelques inconvénients inévitables. Ces derniers, surtout dus à la forme plane des éléments, sont liés à la discréétisation spatiale et peuvent être très sérieux (sect. 11.8).

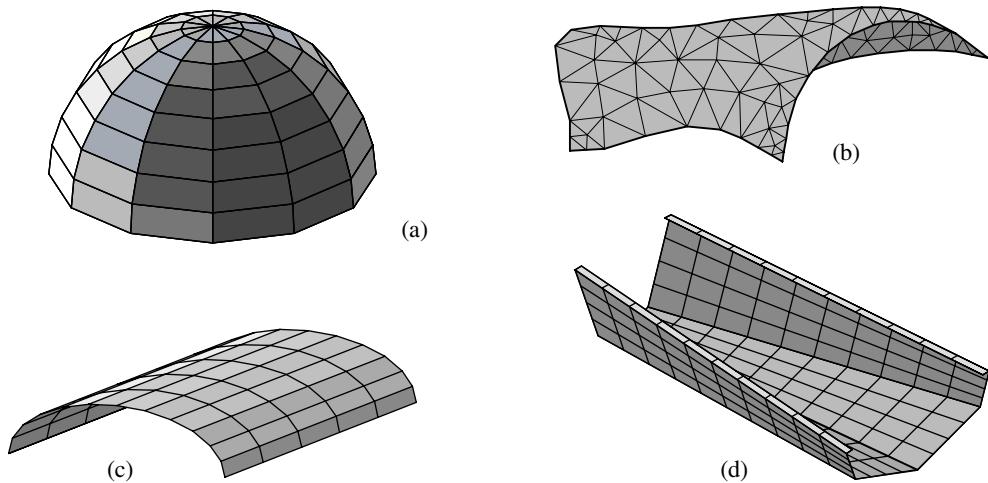


Fig. 11.11 Discréétisations de coques et structures plissées par des éléments finis plans : (a) coque de révolution ; (b) coque à géométrie quelconque (maillage par triangles seul possible) ; (c) coque cylindrique (maillage en rectangles) ; (d) structure plissée (maillage de quadrilatères).

11.7 Eléments de coque d'épaisseur modérée

11.7.1 Généralités

Les développements théoriques propres aux coques d'épaisseur modérée ne faisant pas l'objet de cet ouvrage, on se contente ici de quelques considérations schématiques.

En épaisseur modérée, on tient compte des légères déformations dues aux efforts tranchants en abandonnant l'hypothèse selon laquelle la normale reste perpendiculaire à la surface moyenne en configuration déformée (§ 2.4.2). Au cours du processus de déformation, le plus simple est d'admettre que la normale reste droite et conserve sa longueur, mais qu'elle ne reste pas à angle droit avec les vecteurs de base \mathbf{a}' et \mathbf{b}' : les angles droits varient de deux quantités qui définissent les *glissements moyens* β_α et β_β . Ces derniers fournissent, avec le module de Coulomb G , les contraintes tangentielles $\tau_{\alpha z} = G\beta_\alpha$ et $\tau_{\beta z} = G\beta_\beta$, constantes sur l'épaisseur t de la coque, puis les efforts tranchants V_α et V_β via (2.33).

Les équations (2.2) sont remplacées par

$$\gamma_{\alpha z} = \beta_\alpha = \text{cste} \quad \gamma_{\beta z} = \beta_\beta = \text{cste} \quad (11.3)$$

et les rotations de la normale sont (fig. 11.12)

$$\alpha_\alpha = \theta_\alpha - \beta_\alpha \quad \alpha_\beta = \theta_\beta - \beta_\beta \quad (11.4)$$

La théorie comporte deux déformations (β_α et β_β) et deux déplacements (α_α et α_β) inconnus supplémentaires, pour quatre équations de plus, deux de type cinématique

$$\beta_\alpha = \theta_\alpha - \alpha_\alpha \quad \beta_\beta = \theta_\beta - \alpha_\beta \quad (11.5)$$

et deux à caractère constitutif

$$V_\alpha = Gt\beta_\alpha \quad V_\beta = Gt\beta_\beta \quad (11.6)$$

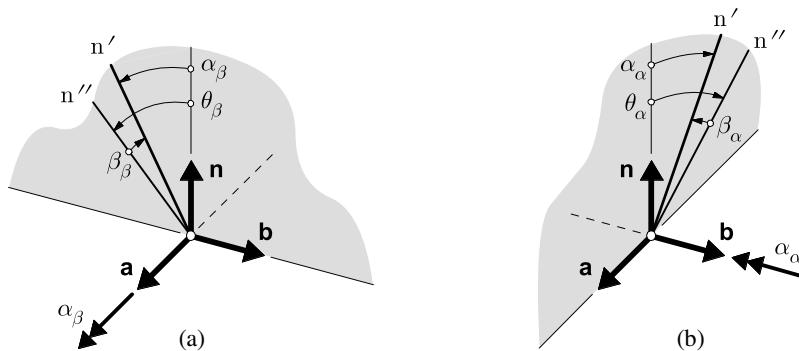


Fig. 11.12 Rotation de la normale (n' : image de la normale en configuration déformée ; n'' : perpendiculaire à la surface moyenne déformée) : (a) composantes dans le plan normal à **a** ; (b) composantes dans le plan normal à **b**.

On aboutit à un ordre dix des équations différentielles. Il y a cinq conditions aux limites par bord, à sélectionner parmi les conditions

- statiques

$$N_\alpha, \quad N_{\alpha\beta}, \quad V_\alpha, \quad M_\alpha, \quad M_{\alpha\beta} \quad (11.7)$$

- cinématiques

$$u, \quad v, \quad w, \quad \alpha_\alpha, \quad \alpha_\beta \quad (11.8)$$

Cette approche est l'extension aux coques de la théorie des plaques d'épaisseur modérée de Mindlin (TGC vol. 6, § 8.7.2). D'autres approches existent (théorie de l'élasticité tridimensionnelle dégénérée, prise en compte de la dilatation et de la distorsion de la normale, etc.). Les développements théoriques ont été essentiellement formulés par Reissner et Naghdi. Lorsque le matériau constituant la coque est peu déformable à l'effort tranchant, il faut cependant reconnaître que l'écart entre les solutions de coque mince et de coque d'épaisseur modérée est très faible.

11.7.2 Éléments finis

Le fait que la rotation de la normale soit une grandeur autonome, indépendante de la rotation propre de la surface moyenne, présente un avantage considérable pour la méthode des éléments finis : on a affaire à une continuité C^0 aux frontières, beaucoup plus facile à réaliser que la continuité C^1 des éléments basés sur la théorie des coques de Love. De surcroît, la conformité n'est plus handicapée par la présence d'arêtes ou d'intersections de coques. Le champ des rotations s'interpole pour lui-même, indépendamment de celui des translations.

On peut construire sur ces bases, pour les coques et structures plissées dont l'épaisseur des parois est modérée, des éléments finis de même type que ceux pour structures minces : à forte courbure, surbaissés ou plans.

Les éléments développés en composantes curvilignes présentent grossièrement les mêmes caractéristiques que leurs homologues minces (à la continuité C^0 près). En dépit de l'élégance de leur formulation, ils sont complexes, ne représentent pas les modes rigides et sont soumis, pour les éléments de bas degré surtout, à de sévères verrouillages. Dans ce domaine aussi, peu d'entre eux ont survécu.

Beaucoup plus intéressants sont les éléments exprimés en description cartésienne. Parmi eux, on trouve les éléments plaques-membranes, obtenus par une combinaison d'un état plan de contrainte et d'un état flexionnel de Mindlin, et les éléments surbaissés, traités par une théorie parallèle à celle de Marguerre. Mais il existe une classe particulière d'éléments, la plus répandue et la plus étudiée, celle des éléments dits tridimensionnels dégénérés.

11.7.3 Éléments du type tridimensionnel dégénéré

Origine

La première idée, élémentaire, fut, lors de la mise au point de la transformation isoparamétrique, de calculer une coque avec des éléments finis d'élasticité tridimensionnelle. En effet, grâce à cette transformation, on peut aisément adapter la géométrie d'un élément de solide à la géométrie d'une coque (TGC vol. 6, sect. 7.5) : il suffit de réduire l'une des dimensions à l'épaisseur de la coque (fig. 11.13). Toutefois, par rapport à une discrétisation ramenée à la surface moyenne, le nombre de nœuds augmente exagérément. De plus, pour des proportions usuelles d'éléments ($s \approx 10t$), la rigidité selon l'épaisseur est excessive et conduit à une matrice de rigidité très mal conditionnée. On peut diminuer la dimension s ($s \approx t$), mais alors le nombre d'inconnues croît de manière démesurée.

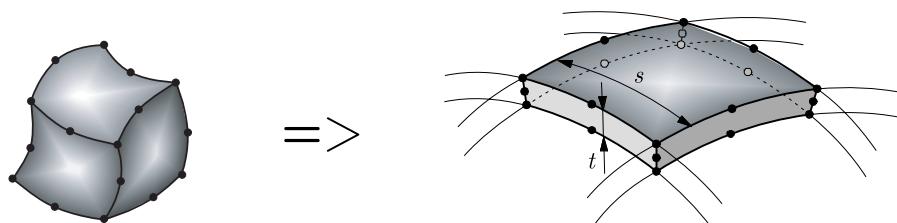


Fig. 11.13 Calcul d'une coque comme un solide.

Pour conserver les avantages de la description isoparamétrique, la seconde idée, beaucoup plus forte, fut d'*assujettir la formulation de l'élément de solide aux exigences des coques*. Ces exigences, à savoir les hypothèses de base de la théorie des coques d'épaisseur modérée, où les deux premières touchent la cinématique et la troisième la loi constitutive, sont

- la normale reste rectiligne (les déplacements u et v varient linéairement à travers l'épaisseur) ;
- la normale conserve sa longueur ($\varepsilon_z = 0$) ;
- la contrainte normale selon l'épaisseur est négligeable ($\sigma_z \approx 0$).

Ici, on construit directement l'élément fini en adaptant l'interpolation cinématique et la loi constitutive aux exigences précédentes, ce qui revient à réduire la théorie tridimensionnelle de l'élasticité à un cadre bidimensionnel de coque. *On n'utilise pas la démarche usuelle*, qui consiste à construire l'élément sur la base d'une théorie de coque préétablie : on n'a, pour ainsi dire, pas besoin d'une théorie de coque !

Ces idées datent de 1968 et sont toujours d'actualité. Vu la démarche très particulière utilisée, on parle aussi d'*approche tridimensionnelle dégénérée aux coques*. Avec la souplesse de la formulation isoparamétrique, une multitude de variantes sont possibles dans la formulation des éléments finis. Ces variantes ne s'associent à aucune théorie précise, mais toutes, si elles sont exprimées de manière cohérente, devraient être voisines de la théorie des coques d'épaisseur modérée de Reissner-Naghdi (ou, comme on dit plus fréquemment dans ce cas, de Reissner-Mindlin).

Le strict contrôle des *éléments finis de coque tridimensionnels dégénérés* ne peut donc se faire que sur la base des résultats numériques.

Deux présentations

Les éléments finis de type isoparamétrique tridimensionnel dégénéré peuvent se présenter sous deux formes.

Dans la première, on ramène la formulation de l'élément à sa surface moyenne Σ , sur laquelle on positionne les nœuds. Les inconnues nodales sont les translations u_X , v_Y et w_Z , exprimées dans le système d'axes cartésiens global, et les rotations α_x et α_y de la normale, exprimées dans un système local tangent à Σ (fig. 11.14a). On peut devoir opérer la rotation transformant les deux composantes

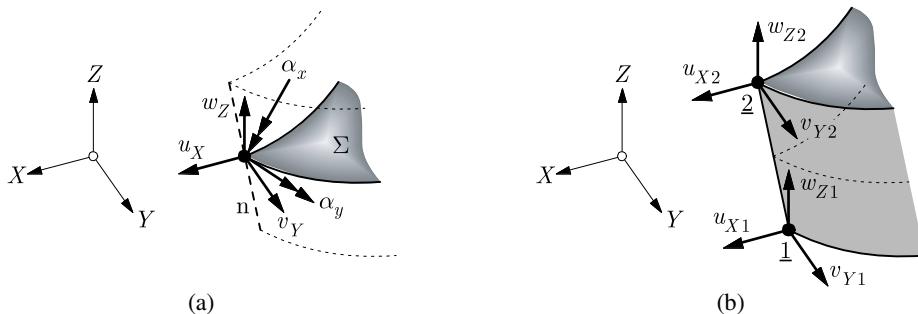


Fig. 11.14 Nœuds et inconnues : (a) sur la surface moyenne Σ ;
(b) par paires, sur les faces supérieures et inférieures ($z = \pm t/2$).

locales de la rotation en trois composantes globales sur les axes (X, Y, Z). Cette transformation soulève le problème du sixième degré de liberté (sect. 11.8 ; TGC vol. 6, § 9.7.3).

Dans la seconde, on cherche à conserver un aspect et une formulation plus tridimensionnels en définissant les nœuds par paires, sur les surfaces supérieure et inférieure de la coque. Les inconnues nodales sont alors les seules translations u_X, v_Y et w_Z de ces nœuds (fig. 11.14b). Il n'y a plus de rotation. Le segment joignant une paire de nœuds n'est pas obligatoirement normal à Σ . La formulation doit néanmoins respecter les trois hypothèses de base précédemment rappelées.

Les deux présentations ont leurs avantages et inconvénients. La première est supérieure, voire seule possible, si la coque est mince ou très mince, dans les intersections complexes, pour les jonctions aux poutres, pour certaines conditions aux limites ; elle nécessite deux fois moins de nœuds. La seconde évite les degrés de liberté de type rotation, permet une liaison plus aisée aux éléments de solide et court-circuite certains problèmes de discréétisation.

L'intégration numérique joue aussi un rôle important. Dans le premier cas, elle peut être ramenée à la surface moyenne, alors que dans le second, elle reste nécessairement tridimensionnelle, donc plus lourde (on doit intégrer numériquement selon l'épaisseur). En conséquence, les grandeurs statiques aux points d'intégration sont, pour le premier cas, les efforts intérieurs et, pour le second cas, les contraintes, ce qui, pour l'ingénieur, est moins pratique.

Remarque

Les éléments du second type peuvent toutefois présenter des avantages supérieurs dans certains domaines (absence des rotations en grands déplacements ; problèmes de contact ; adaptativité et maillage automatique). De plus, il est aisément d'y inclure les effets à travers l'épaisseur (abandon des deux dernières hypothèses fondamentales), ce qui leur donne un caractère quasi tridimensionnel permettant l'emploi direct de lois constitutives tridimensionnelles non linéaires (calcul des coques dites épaisses ; grandes déformations). Des extensions sont encore possibles aux coques multicouches (matériaux composites).

Intérêt

L'intérêt considérable de ce type d'élément fut immédiatement perçu : simplicité de la formulation et puissance de l'utilisation.

Grosso modo, la formulation consiste à greffer un état membranaire sur une plaque de Mindlin pour définir un élément origine plaque-membrane. On interpole les champs des translations et des rotations en utilisant des cas connus (interpolations de Serendip et Lagrange). Décrivant géométrie et déplacements sous forme isoparamétrique tridimensionnelle et respectant les hypothèses des coques, on aboutit à un élément de coque courbe.

Ces éléments sont donc indifféremment plans, surbaissés ou à forte courbure, et à bords droits ou incurvés (fig. 11.15). La géométrie est fixée par les coordonnées des nœuds et, si nécessaire (fig. 11.15a), par l'épaisseur (qui, par la transformation isoparamétrique, peut être variable). Grâce à la continuité C^0 et à la formulation isoparamétrique, les modes rigides sont – en principe – toujours satisfaits, la conformité aux frontières est le plus souvent assurée, même le long des arêtes (jonctions), et la convergence est garantie.

Comme les données sont en plus très simples (il suffit des coordonnées des nœuds), on voit qu'on cumule pratiquement tous les avantages des éléments précédents sans en retenir les inconvénients.

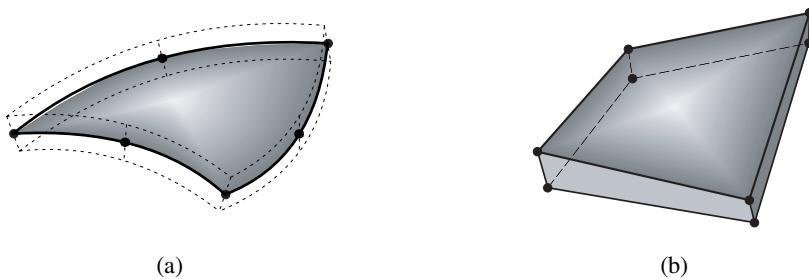


Fig. 11.15 Éléments de coque tridimensionnels dégénérés : (a) élément triangulaire courbe quadratique à six nœuds ; (b) élément quadrilatère gauche bilinéaire à huit nœuds.

Les éléments tridimensionnels dégénérés isoparamétriques semblent donc très attractifs pour le calcul pratique. Le fait qu'ils tiennent compte de l'effort tranchant est d'ailleurs une qualité de plus, puisque cet effort existe réellement. On peut ainsi calculer certaines structures où il n'est pas a priori négligeable (barrage voûte, coque sandwich). Ces éléments permettent encore de faire aisément des raccordements avec une partie tridimensionnelle massive (fondation du barrage voûte).

Remarque

Lorsque ces éléments sont présentés avec des nœuds situés sur les *seules* faces supérieure et inférieure (fig. 11.16), ils ont extérieurement l'aspect d'un élément d'élasticité tridimensionnelle. On doit s'assurer qu'il ne s'agit là que d'une définition géométrique et que l'élément est bien formulé comme une coque d'épaisseur modérée.

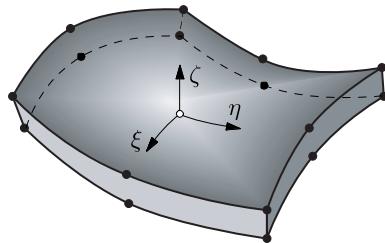


Fig. 11.16 Élément de coque d'épaisseur modérée (type tridimensionnel dégénéré) ou élément d'élasticité tridimensionnelle ? (ξ , η et ζ sont les coordonnées naturelles de l'élément.)

Si l'élément est construit comme un élément de volume en élasticité tridimensionnelle, la convergence est compromise par un nouveau phénomène de verrouillage, dit *verrouillage d'épaisseur* (ou *de volume*). Ce verrouillage s'explique aisément. Selon la direction transversale ζ , deux nœuds définissent un champ linéaire du déplacement et, par suite, une dilatation ε_ζ constante. Si l'élément est purement fléchi autour de ξ par exemple, σ_η varie linéairement selon ζ (Navier). Or la loi de Hooke tridimensionnelle

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{E} (\sigma_\zeta - \nu(\sigma_\xi + \sigma_\eta))$$

(avec ici $\sigma_\xi = \sigma_\zeta = 0$) impose une variation *linéaire* de ε_ζ , à cause du coefficient de Poisson. Le fait que l'élément fini ne puisse représenter qu'une valeur constante moyenne, nulle ici, est la cause

du verrouillage. Pour le combattre, et donc converger efficacement, il faut aussi discréteriser à travers l'épaisseur.

Ce verrouillage montre que, pour introduire un effet « à travers l'épaisseur » dans un élément de coque (coque épaisse), il faut que ε_ζ soit au moins linéaire (cf. remarque précédente).

Premières tentatives

Les premiers éléments finis de type coque isoparamétrique dégénéré furent proposés peu avant 1970. On devait constater qu'ils convergeaient d'autant plus lentement vers la solution exacte que la structure était *mince*. Ils étaient en fait le siège d'une surrigidité, due au verrouillage de cisaillement essentiellement, de membrane également, voire d'épaisseur.

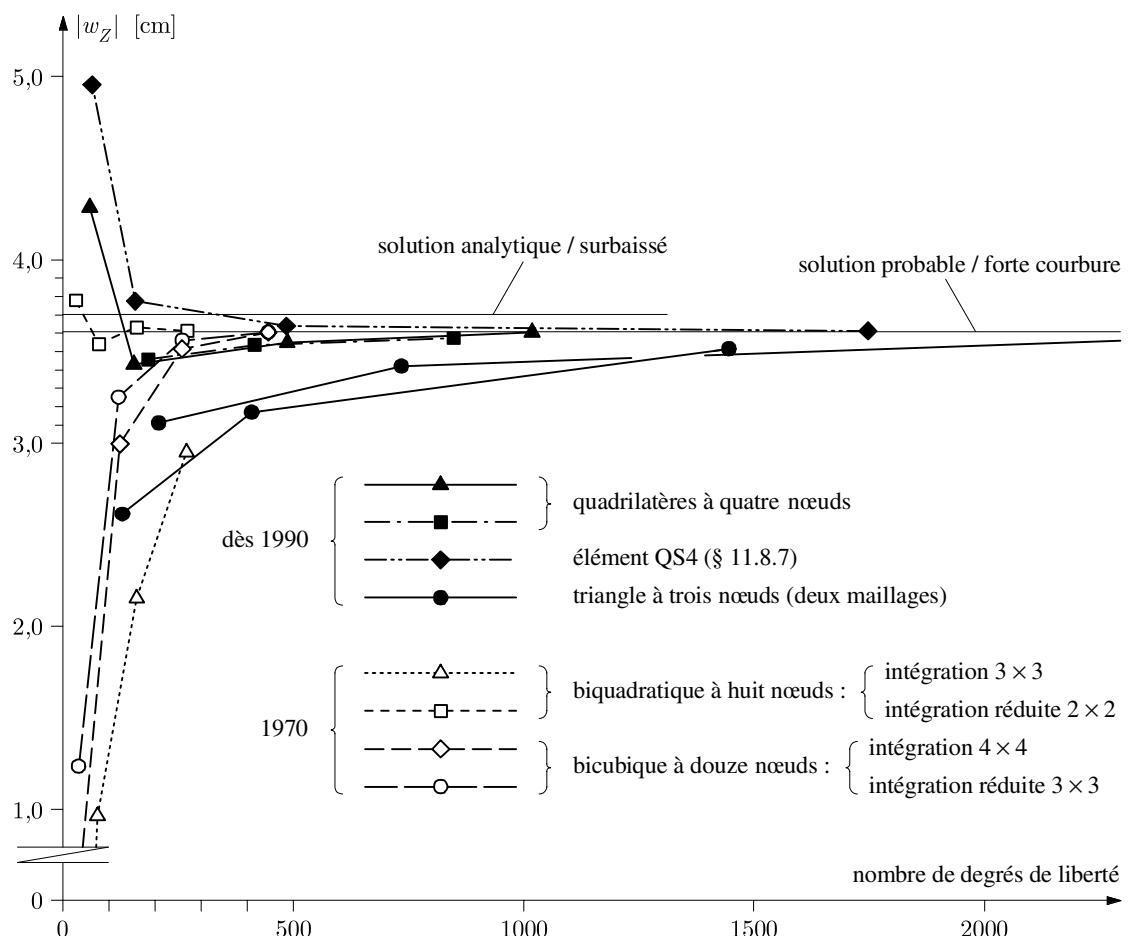


Fig. 11.17 Voûte de la figure 11.9 calculée avec des éléments de coque du type tridimensionnel dégénéré.

Peu après, on découvrit que leur propriété de convergence s'améliorait parfois considérablement lorsque, pour le calcul de la matrice de rigidité, on utilisait la technique de l'*intégration réduite* (TGC vol. 6, sect. 7.6). Cette technique s'avéra particulièrement favorable aux éléments de degré peu élevé (linéaire, quadratique surtout, et cubique) : certains éléments acquéraient un comportement voisin ou supérieur à celui des éléments développés en théorie de Kirchhoff-Love (fig. 11.17). Devant ce succès, diverses variantes d'intégration réduite furent étudiées et proposées (intégration sélective ; techniques de stabilisation – destinées à lutter contre les mécanismes ; etc.).

Toutefois, la sous-intégration est une méthode incertaine et aléatoire. Bonne pour certains éléments, elle est inefficace pour d'autres (fig. 11.17 : l'effet sur l'élément cubique est faible). De plus, elle peut introduire des mécanismes. Ce n'est que vers 1990 qu'on a étudié, compris et combattu correctement le verrouillage pour produire des éléments dignes de confiance. On sera donc particulièrement prudent avec tous les éléments développés avant cette date.

Aujourd'hui

Puisqu'obtenir l'expression de certaines composantes de la déformation directement à partir de l'interpolation choisie pour le champ des déplacements conduit au verrouillage, il convient, pour combattre ce dernier, d'interpoler différemment, indépendamment et convenablement ces composantes. Plusieurs techniques existent, qui se rattachent aux modèles mixtes des éléments finis. Les paramètres utilisés pour l'interpolation des déformations sont éliminés au niveau de l'élément fini par collocation ou condensation statique, de sorte que l'élément a finalement l'aspect d'un modèle déplacement classique.

Il reste néanmoins difficile d'éliminer toutes les sources de verrouillage. De façon générale, la mise au point d'un *bon* élément fini isoparamétrique tridimensionnel dégénéré de type coque reste une entreprise délicate. L'utilisateur doit soigneusement faire connaissance avec tout élément de ce type avant l'emploi pratique ; en particulier, il faut vérifier les modes rigides de rotation.

Des éléments relativement fiables existent cependant (fig. 11.17) et l'ingénieur les utilisera avec le plus grand profit : ils conviennent indifféremment aux coques à forte courbure ou surbaissées, ainsi qu'aux structures plissées, que l'épaisseur soit mince ou modérée.

Remarques

Les techniques anti-verrouillages par interpolation particulière de certaines composantes de la déformation sont appelées, en langue anglaise, *assumed natural strain* (ANS) method, *enhanced assumed strain* (EAS) method et *incompatible displacement mode* method. La seconde est la plus utilisée ; la troisième, la plus ancienne, en est une version particulière (technique des modes incompatibles). Ces techniques relevant de la méthode des éléments finis, on renvoie, pour leur étude, aux ouvrages traitant cette méthode (TGC vol. 6, bibliographie).

On rencontre parfois des éléments hybrides (voire mixtes-hybrides), avec interpolation indépendante des contraintes, aboutissant à un résultat final de même nature que les éléments mixtes.

11.8 Quelques problèmes de discréétisation

11.8.1 Introduction

L'opération de discréétisation des structures tridimensionnelles à parois minces ou d'épaisseur modérée reste une étape délicate d'une analyse par éléments finis. La complexité des formes géométriques pousse l'ingénieur aux simplifications, nécessaires, mais parfois excessives. De plus, les éléments, de par leurs propriétés, peuvent produire des comportements inattendus. On examine dans cette section quelques-uns des problèmes de discréétisation les plus classiques. Certains concernent surtout les éléments plaques-membranes, d'autres tous les éléments, d'autres enfin ne touchent que quelques types d'éléments ; on laisse au lecteur le soin du tri.

11.8.2 Approximation de la géométrie

Le plus souvent, la représentation de la géométrie d'une coque par un maillage d'éléments finis introduit nécessairement des approximations géométriques. Entre les nœuds, l'approximation polynomiale de la géométrie ne suit généralement pas la forme réelle de la surface moyenne de la coque ; le cas extrême est celui des éléments plaques-membranes, créant une *coque à facettes* inscrite dans la surface moyenne exacte. Mais même avec des éléments courbes, la continuité de la pente, transversalement aux frontières, n'est ordinairement pas assurée (fig. 11.18). Il en résulte la formation d'*arêtes artificielles*, qui peuvent provoquer de légères modifications de la rigidité de la coque discréétisée.

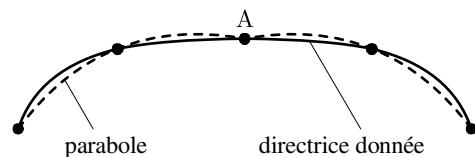


Fig. 11.18 La discréétisation de la directrice d'une voûte autoportante par deux paraboles fait apparaître une arête artificielle le long de la génératrice A (vue en coupe).

La situation peut être pire avec des éléments surbaissés formulés en coordonnées cartésiennes, car ces éléments sont rapportés à un plan de référence par *projection orthogonale*. Il en résulte une *dislocation* le long des frontières, entre les nœuds sommets (fig. 11.19). Ces dislocations rendent hasardeuse la disposition de nœuds ailleurs qu'aux sommets.

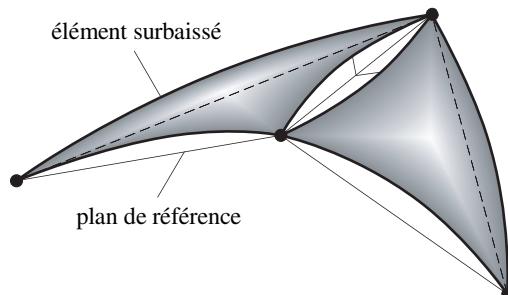


Fig. 11.19 Dislocation inévitable à la jonction de deux éléments triangulaires de type Marguerre.

Très peu d'études ont été consacrées à ces problèmes. Il semble que les erreurs géométriques aient *peu d'influence* sur les résultats, sauf pour les maillages visiblement trop grossiers. D'ailleurs, asymptotiquement, c'est-à-dire quand la taille des éléments finis tend vers zéro ($h \rightarrow 0$), ces erreurs s'atténuent davantage et ne compromettent donc pas les propriétés de convergence.

Il convient toutefois de rester attentif. Considérons par exemple un panneau cylindrique muni d'un raidisseur annulaire interne (fig. 11.20a). La discréétisation de cette structure par des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds, de type coque surbaissée, fait apparaître des dislocations le long de chaque élément de raidisseur (fig. 11.20b). Tout se passe alors comme si la hauteur moyenne du raidisseur devenait supérieure à b , ce qui accroît artificiellement l'effet de raidissement par rapport à la réalité. Dans un problème d'instabilité, cet effet peut être très sensible.

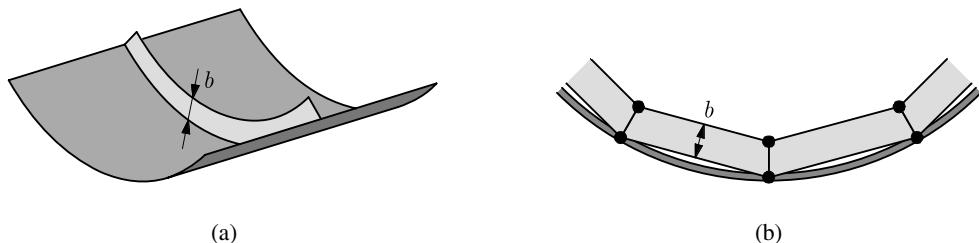


Fig. 11.20 Dislocation modifiant la raideur d'une structure : (a) vue ; (b) discréétisation (coupe).

11.8.3 Arêtes artificielles et moments parasites

Envisageons la discréétisation, par des éléments plans de coque, d'un cylindre soumis à une pression uniforme (fig. 11.21a). La modification de géométrie produite par le maillage en facettes introduit inévitablement des perturbations dans le champ des efforts intérieurs. Pour le cylindre, on a $N_\varphi = \text{cste}$ et $M_\varphi = 0$, tandis que dans le modèle à facettes (qui est ici une structure plissée), chaque élément fini est évidemment soumis à des *moments parasites* (fig. 11.21b).

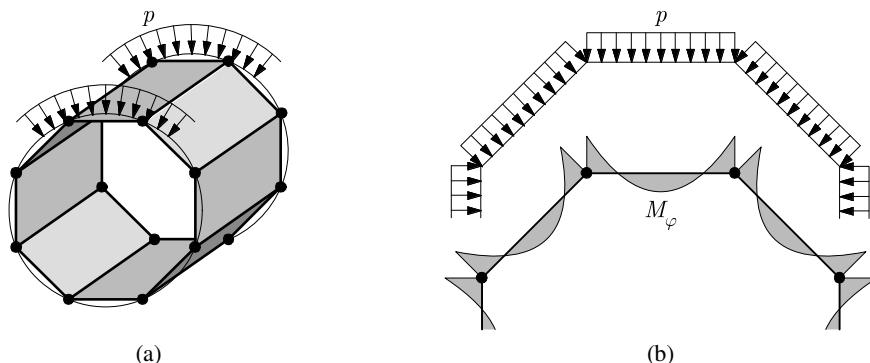


Fig. 11.21 Les arêtes artificielles créent des moments parasites.

Les moments parasites apparaissent dès qu'existent des arêtes artificielles (§ 11.8.2) et se superposent aux moments réellement existants. L'importance de ces moments parasites est difficile à évaluer ; elle reste en principe faible si la discréétisation est raisonnablement fine, et s'atténue asymptotiquement ($h \rightarrow 0$).

11.8.4 Difficultés de conformité

Dans les structures plissées, lors des jonctions de coque et le long des arêtes artificielles, la non-conformité devient quasiment inévitable.

Considérons deux éléments finis de type plaque-membrane connectés à angle droit (fig. 11.22). On observe immédiatement que chaque élément possède un degré de liberté de rotation qui ne peut être connecté à l'autre élément, vu qu'il n'y a que deux degrés de liberté de rotation par nœud. Cette circonstance, conséquence naturelle de la modélisation (cf. aussi § 11.8.6), peut néanmoins conduire à des problèmes de conformité.

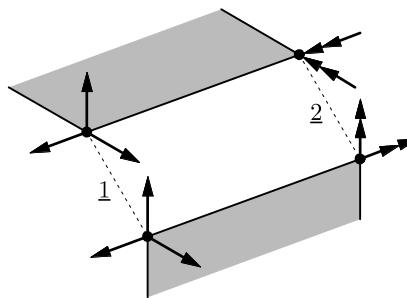


Fig. 11.22 Raccordement, à angle droit, de deux éléments plaques-membranes.

Pour examiner plus en détail la conformité le long de la frontière 1-2, prenons le cas courant, de type Kirchhoff-Love, où l'on combine un champ membranaire (u, v) linéaire à un champ flexionnel (w) cubique pour créer un élément plaque-membrane (la situation est la même pour un élément surbaissé utilisé plan). La figure 11.23(a) montre la situation examinée : il est clair que la cubique de plaque ne peut se connecter à la droite de membrane ; on ne peut réaliser que $v_1 = w_1$ et $v_2 = w_2$.

Il faut donc choisir un champ membranaire cubique. Mais le choix usuel des degrés de liberté v_1, v_2, v_3 et v_4 ne convient toujours pas, car ces degrés ne s'associent pas à ceux de la plaque w_1, w_2, w'_1 et w'_2 (incompatibilité des continuités C^0 et C^1 ; fig. 11.23b). On devrait donc choisir des dérivées des déplacements membranaires pour assurer la conformité (fig. 11.23c), mais ces degrés de liberté introduisent une surcompatibilité indésirable et sont malaisés à manipuler pratiquement.

De façon plus générale, on constate qu'il est difficile de réaliser la conformité le long d'un raccord à angle de deux éléments finis de coque (surtout en théorie de Kirchhoff-Love) ; en pratique, on y renonce.

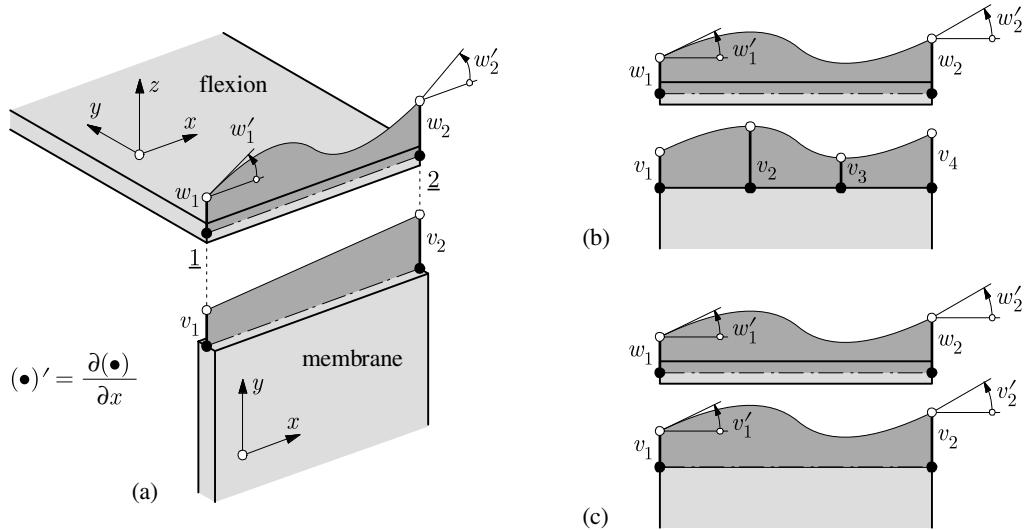


Fig. 11.23 Non-conformité aux frontières des coques à facettes.

Terminons par le raccord de trois éléments (fig. 11.24). Les éléments (1) et (2) sont admis parfaitement connectés, comme à la figure 11.23(c). Le raccord flexionnel des éléments (1) et (3) exige alors l'égalité des rotations autour de l'arête a-a ($\alpha = w'_1$). Par suite, le raccord des éléments (3) et (2) entraîne la conservation de l'angle droit au nœud 1 de l'élément (2) ($\beta = \alpha$). Ainsi, on a, au niveau du comportement membranaire de l'élément (2) et au voisinage du nœud 1,

$$\gamma_{xy} = 0 \implies \tau_{xy} = 0$$

Si cette situation est acceptable ici (fig. 11.24), elle ne l'est plus lorsque les raccordements à angle proviennent des arêtes artificielles issues de la discréttisation. Dans une coque à facettes par exemple, l'annulation des déformations tangentielles en chaque point anguleux tend à faire disparaître la déformabilité au cisaillement membranaire, ce qui produit une surrigidité inadmissible.

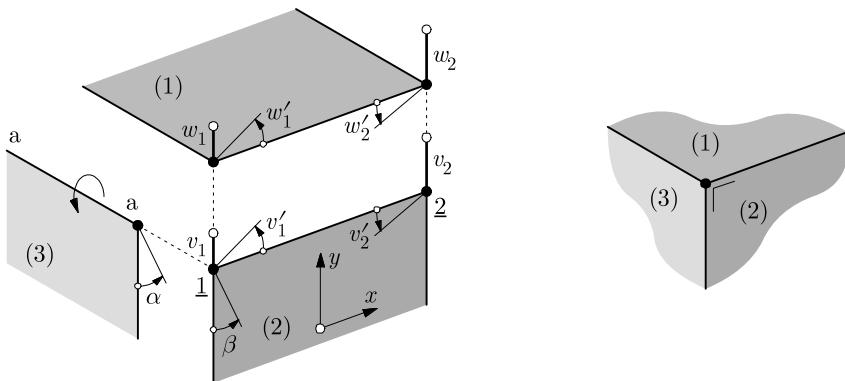


Fig. 11.24 Raccord de trois éléments.

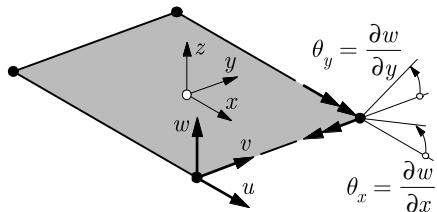
La conclusion peut paraître paradoxale : *il faut accepter la non-conformité aux frontières*. Il ne s'agit évidemment pas d'exagérer dans ce sens, car l'expérimentation numérique montre que, *de deux discréétisations incompatibles, celle qui présente la meilleure compatibilité cinématique fournit les meilleurs résultats*.

11.8.5 Sixième degré de liberté et rotation autour de la normale

Dans la plupart des éléments de coque, *le sixième degré de liberté*, souvent appelé la *rotation autour de la normale*, *n'est pas alimenté en raideur* (§ 11.4.2) : chaque nœud ne comporte que cinq degrés de liberté locaux, par exemple u, v, w, θ_x (ou α_x) et θ_y (ou α_y) dans la figure 11.25. Mais l'assemblage *spatial* des éléments alimente en rigidité les *six degrés de liberté globaux de chaque nœud* ; c'est ainsi qu'il y a six inconnues en chaque nœud d'une coque à facettes.

Cependant, lorsque l'assemblage de plusieurs éléments se fait dans un plan (structures plissées) ou que plusieurs éléments finis ont, en un même nœud, un plan tangent commun (coques), la rotation normale de certains nœuds peut être dépourvue de rigidité (fig. 11.26). De tels nœuds, entourés d'éléments tous situés dans un plan ou ayant le même plan tangent, ne possèdent que cinq degrés de liberté linéairement indépendants. Ils doivent faire l'objet d'un traitement particulier.

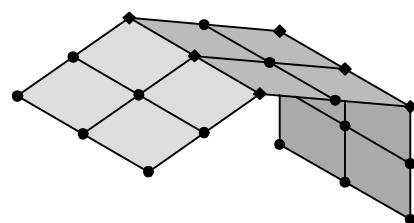
Par exemple, on distingue les nœuds à six degrés de liberté de ceux à cinq, et on exprime l'équilibre de ces derniers en axes locaux ; on peut aussi, par simplicité, dire que tous les nœuds ont six degrés de liberté, puis, pour ceux qui n'en ont que cinq, introduire des axes locaux et réaliser un blocage de rotation autour de la normale (ce qui neutralise les lignes et colonnes de zéros de la matrice de rigidité) ; on peut encore introduire une petite rigidité fictive « appropriée » sur le sixième degré de liberté, lorsque c'est nécessaire, afin d'éviter la singularité de la matrice de rigidité (cette technique, d'usage courant, est néanmoins fortement déconseillée, car les résultats peuvent être très sensibles au choix de la rigidité fictive) ; etc.



u, v : membrane
 u, v, w : translations

w, θ_x, θ_y : plaque
 θ_x, θ_y : rotations

Fig. 11.25 Degrés de liberté en axes locaux.



- noeuds à cinq inconnues
- ◆ noeuds à six inconnues

Fig. 11.26 Cinq ou six degrés de liberté ?

Cette particularité devient critique lorsque plusieurs éléments sont *presque coplanaires* (fig. 11.27). Cette situation est fréquente dans les coques à facettes et peut aussi survenir par imprécision numérique des données (même avec un meilleur automatique). A partir de quel angle α peut-on admettre que les éléments sont coplanaires ? L'expérience numérique (mots de 64 bits, soit environ 16 chiffres décimaux) montre que, pour $\alpha > 10^{-2}$, on peut conserver six degrés de liberté et, pour $\alpha < 10^{-4}$,

on peut négliger la rigidité en rotation normale et utiliser cinq degrés de liberté. Dans le cas intermédiaire ($10^{-4} \leq \alpha \leq 10^{-2}$), il est recommandé de prendre des mesures spéciales.

L'utilisateur d'un programme se doit de se renseigner sur la manière dont est traité le sixième degré de liberté des éléments de coque en général, et des éléments presque coplanaires en particulier.

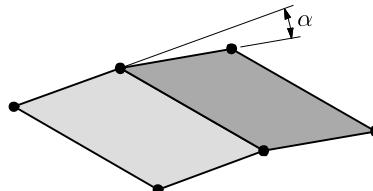


Fig. 11.27 Éléments presque coplanaires (α petit).

11.8.6 Jonctions et sixième degré de liberté

Le problème lié au sixième degré de liberté est également critique dans les jonctions de coques et, surtout, dans les jonctions avec des éléments finis d'un autre type.

Examinons le cas de la jonction d'un élément fini de coque avec un élément fini de poutre spatiale (fig. 11.28). La poutre a trois degrés de liberté de rotation, la coque deux seulement, de sorte qu'*une inconnue cinématique de rotation n'est pas connectée*. Le problème est particulièrement visible dans les assemblages à angle droit : la torsion θ_x de la poutre n'est pas transmise à la coque et il peut en résulter des mécanismes (fig. 11.29a et b). La difficulté est la même dans une jonction plane (état membranaire) : la flexion de la poutre n'est pas transmise (fig. 11.29c ; tout se passe comme si la poutre était articulée à la paroi). Pour les coques raidies (fig. 11.29d) et dans les intersections de coques (fig. 11.29e et f), le problème, quoique moins aigu, est identique : les inconnues de rotation sont imparfaitement connectées (sect. 11.8.4).



Fig. 11.28 L'assemblage d'une poutre spatiale avec une coque est incompatible au niveau des degrés de liberté nodaux : (a) poutre, six déplacements ; (b) coque, cinq déplacements.

De façon générale, dans toute jonction coque-coque ou coque-poutre de la méthode des éléments finis se présente une difficulté essentielle liée à la modélisation et à la discréétisation. Les cinématiques sont telles qu'une incompatibilité apparaît forcément aux frontières des éléments. On peut d'ailleurs se poser la question de la convergence vers la solution exacte en présence de telles non-conformités.

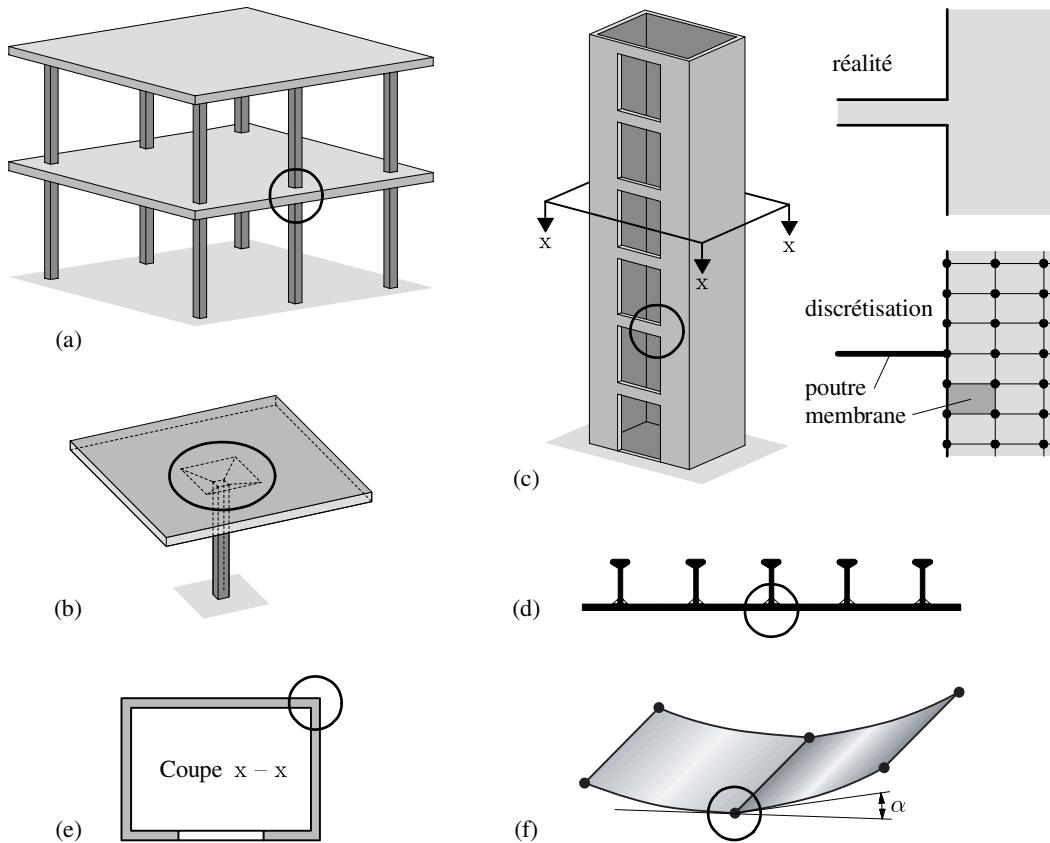


Fig. 11.29 Jonctions diverses : (a) et (b) colonne - plaque-membrane ; (c) mur-poutre ; (d) coque-raidisseur ; (e) coque-coque ; (f) à angle (faible).

11.8.7 Eléments à six degrés de liberté

Pour lutter contre la difficulté précédente, on a cherché à créer des éléments à six degrés de liberté nodaux, c'est-à-dire à introduire la *rotation autour de la normale* comme inconnue cinématique d'un élément fini de coque. Cette rotation touche en fait le comportement de membrane. Elle est donc assimilable à une rotation dans le plan (fig. 11.30) ; comme l'élasticité plane ne fait pas intervenir cette inconnue cinématique dans sa formulation, il faut créer des formulations spéciales pour la faire apparaître.

En implantant le sixième degré de liberté, on crée une sorte de surcompatibilité dans l'élément fini ; de plus, la formulation peut s'avérer assez délicate (verrouillage, mécanismes). La recherche reste active dans ce domaine. Deux éléments finis de ce type ont été développés au LSC/EPFL.

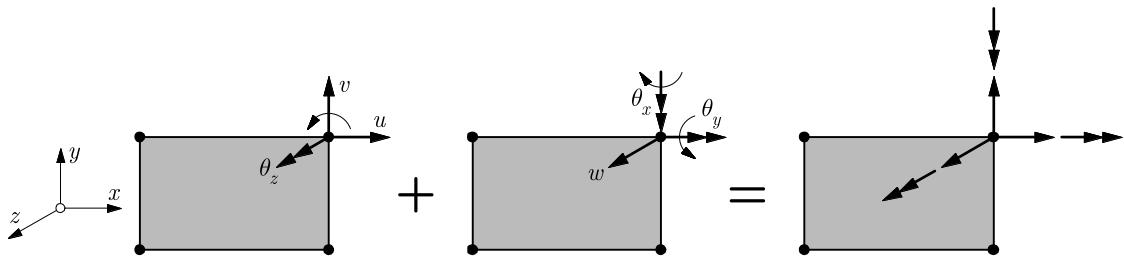


Fig. 11.30 Combinaison d'un état membranaire, avec inconnue de rotation θ_z , et d'un état flexionnel, conduisant à six degrés de liberté (axes locaux).

L'élément JET⁽¹⁾ est un quadrilatère surbaissé à quatre nœuds (fig. 11.31a ; la forme courbe est fixée par les coordonnées des points situés au milieu des côtés). La rotation normale est associée à l'angle dont tournent les côtés, au droit d'un nœud, dans le comportement membranaire (en anglais : *vertex rotation*). Exprimé en composantes cartésiennes et de type Kirchhoff en flexion, JET converge vers la solution des coques minces à forte courbure.

L'élément QS4⁽²⁾ est un quadrilatère gauche surbaissé à quatre nœuds (fig. 11.31b) dont la rotation normale est la rotation matérielle Ω_{xy} de l'élasticité plane (TGC vol. 3, sect. 3.5 ; en anglais : *drilling rotation*). De type Mindlin en flexion et formulé en composantes cartésiennes, il converge vers la solution des coques à forte courbure et d'épaisseur modérée.

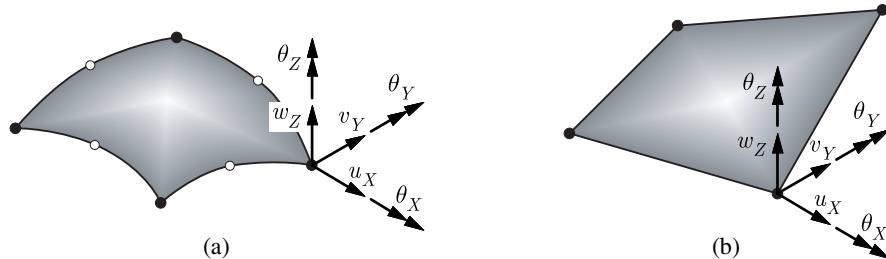


Fig. 11.31 Eléments avec rotation normale : (a) JET ; (b) QS4.

Les éléments finis de coque à six degrés de liberté nodaux présentent un intérêt pratique considérable, car ils éliminent la difficulté de discréétisation la plus aiguë.

⁽¹⁾ Ph. Jetteur et Fr. Frey, *A four node Marguerre element for nonlinear shell analysis* ; Engineering Computations, Vol. 3, Dec. 1986, p. 276.

⁽²⁾ A. Ibrahimbegovic, Fr. Frey et B. Rebora, *Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation* ; Revue européenne des éléments finis, vol. 2, 1997, p. 157.

11.9 Eléments finis particuliers

11.9.1 Introduction

Les ingénieurs ont développé des types spéciaux d'éléments finis adaptés à certaines géométries particulières de structures en coque. C'est le cas notamment pour les coques de révolution, les structures prismatiques et, plus généralement, les pièces longues formées de parois minces (ponts).

Ces structures ont une direction privilégiée (coordonnée circonférentielle θ pour les coques de révolution ; coordonnée longitudinale x pour les coques prismatiques ; etc.) ; selon cette direction, certaines caractéristiques géométriques et mécaniques sont conservées (épaisseur ; courbure ; forme de la directrice ; matériau ; etc.). Il est alors judicieux d'utiliser une technique de décomposition multiplicative du champ des déplacements, comportant l'approximation polynomiale usuelle selon la dimension non privilégiée et un *développement en série* dans la dimension privilégiée. On utilise volontiers les séries de Fourier et on parle alors d'*éléments finis semi-analytiques*.

En procédant de la sorte, on cherche à réduire la formulation et la discréétisation de la structure à une seule dimension, ce qui est très avantageux : au lieu de mailler avec des éléments bidimensionnels, on ne discréétise que la coupe méridienne ou transversale (fig. 11.32). Le cas le plus rationnel est celui où la formulation conduit au découplage complet des termes de la série ; la solution est alors obtenue par la superposition d'un certain nombre de ces derniers et le temps de calcul peut être réduit d'un à deux ordres de grandeur.

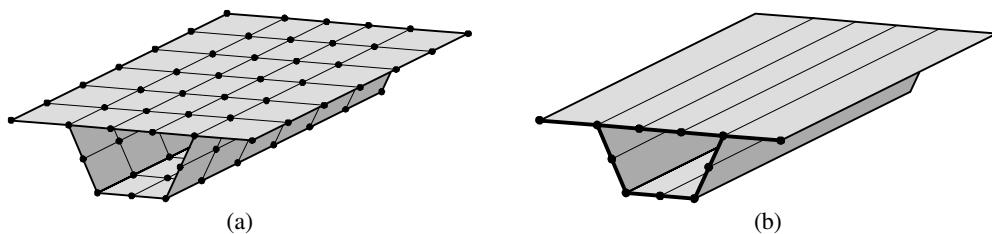


Fig. 11.32 Discréétisation d'une coque prismatique : (a) éléments finis ; (b) bandes finies.

11.9.2 Coques de révolution

Les *éléments finis pour coques de révolution* sont des tronçons de coque limités par deux parallèles. Les éléments sont connectés par leurs parallèles communs : les nœuds sont en fait des *cercles nodaux*. On se contente souvent de ne représenter ces éléments que par leur coupe méridienne.

Le premier élément proposé fut un tronc de cône à deux cercles nodaux en théorie de Kirchhoff-Love (fig. 11.33a) ; on peut évidemment formuler des éléments plus évolués, à méridien courbe, d'épaisseur modérée, de type isoparamétrique dégénéré, etc. (fig. 11.33b).

Lorsque le chargement est de révolution, on est indépendant de la coordonnée circonférentielle θ ; la formulation et la discréétisation se limitent au méridien et il y a trois inconnues nodales. Lorsque le chargement n'est pas de révolution, on continue à travailler au niveau du seul méridien par une formulation semi-analytique de l'élément (séries de Fourier selon la variable θ) ; il y a maintenant cinq

inconnues nodales ; on peut aussi traiter le cas où les conditions d'appui ne sont pas de révolution (fig. 1.12 par exemple).

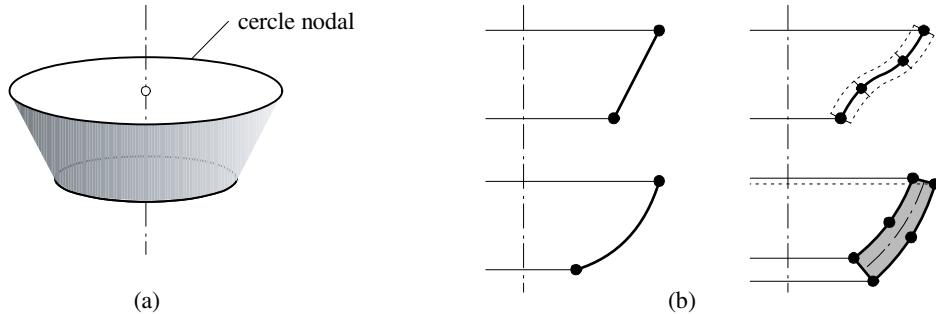


Fig. 11.33 Éléments finis pour coques de révolution : (a) tronc de cône ; (b) éléments divers (coupe du méridien).

11.9.3 Méthode des bandes finies

Les *bandes finies* (en anglais *finite strips*) sont des éléments plaques-membranes ou coques quadrangulaires allongés, de géométrie a priori quelconque, mais souvent voisine de celle des panneaux utilisés dans le calcul des coques prismatiques (sect. 10.5). Les bandes sont connectées par leurs longs côtés : les nœuds sont en fait des *lignes nodales* (fig. 11.34). Ces lignes correspondent, en particulier, aux arêtes de la structure à analyser.

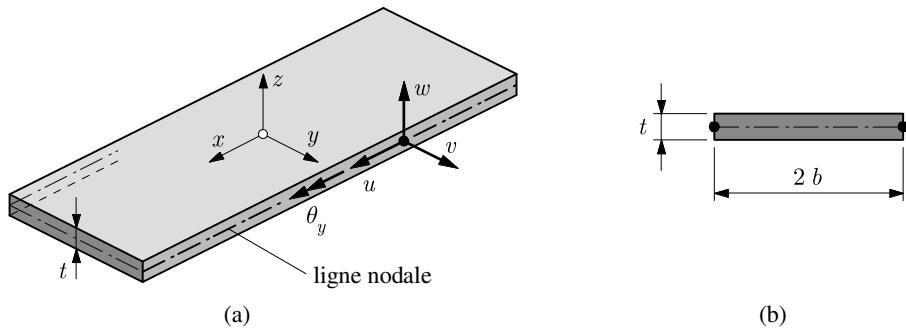


Fig. 11.34 Élément fini de type bande finie, à deux nœuds (ou lignes nodales) : (a) vue ; (b) coupe.

La bande finie de base s'étend sur toute la longueur L de la structure à analyser, est de plan rectangulaire et est *simplement appuyée* sur ses petits côtés ; elle s'applique au calcul des coques prismatiques et voûtes autoportantes à simple portée (appuyées sur des diaphragmes). Il y a quatre inconnues nodales, les trois translations et la rotation autour de la ligne nodale (fig. 11.34). La formulation est polynomiale selon la directrice et analytique selon la génératrice (séries de Fourier), avec découplage des harmoniques. Ce cas correspond à l'efficacité maximale de la *méthode des bandes finies* (fig. 11.35).

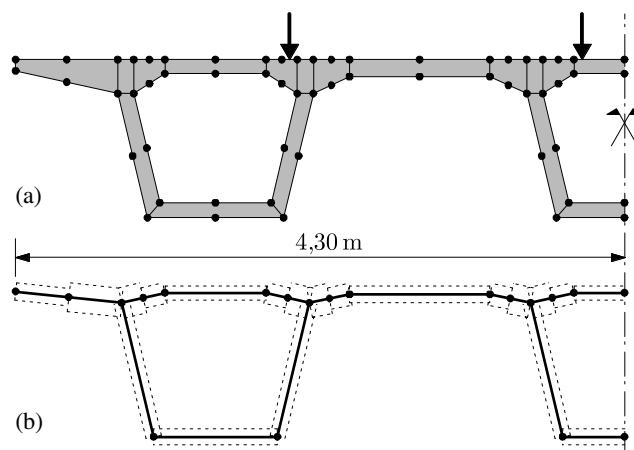


Fig. 11.35 Pont en béton préfabriqué à trois caissons ($L = 27,15 \text{ m}$) : (a) demi-coupe transversale et maillage d'éléments finis tridimensionnels (27 mailles longitudinales ; 4 872 degrés de liberté) ; (b) maillage de la section par bandes finies (épaisseur constante par bande ; 80 degrés de liberté ; 50 harmoniques). Rapport des temps de calcul : ~ 100 à 1.
(Source : A. Godinas, Dép. M&S, Université de Liège.)

Par rapport à la solution analytique des coques prismatiques (§ 10.5.6), la méthode des bandes finies utilise, selon la directrice, les interpolations classiques de la méthode des éléments finis. Dans (10.13), les fonctions $u_i(y)$, $v_i(y)$ et $w_i(y)$ sont interpolées par des polynômes typiques des poutres, par exemple (deux nœuds et huit inconnues, fig. 10.7) linéaires pour u_i et v_i et cubique pour w_i .

Pour pouvoir analyser des structures plus générales, la méthode a vu ses possibilités largement étendues. L'essentiel de ces extensions est rendu possible par l'emploi de *fonctions splines cubiques* dans le sens longitudinal ; il faut pour cela introduire des nœuds le long des lignes nodales (*nœuds internes*) et il se produit un couplage partiel ou total, ce qui pénalise fortement la méthode (les temps de calcul restent inférieurs, quoique voisins de ceux d'un classique calcul aux éléments finis). Mais la

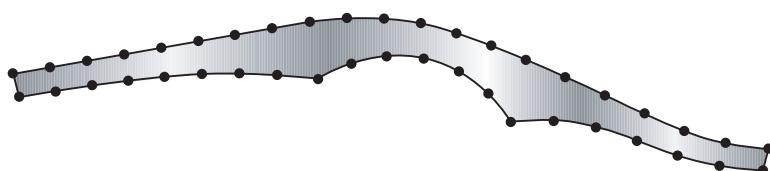


Fig. 11.36 Exemple d'une bande finie courbe spatiale avec ses deux fois 21 nœuds internes, pouvant discréteriser l'âme d'un pont sur quatre appuis.

généralisation est considérable : appliquant la théorie de Reissner-Mindlin et la transformation isoparamétrique, la bande finie prend une forme très libre (biaise, courbe (dans et hors de son plan), de largeur variable, d'épaisseur mince ou modérée variable, etc.), devenant une *bande de coque* (fig. 11.36) ; il y a alors cinq ou six degrés de liberté par nœud ; les conditions d'appui peuvent être quelconques ; on peut tenir compte des organes d'entretoisement et des continuités ; on peut raccorder les bandes finies aux éléments finis et éléments de frontière.

Un domaine d'application privilégié est le calcul des ponts, où la recherche est fort active et les progrès constants.

11.10 Conclusions

La méthode des éléments finis est l'outil clé pour l'analyse des structures en coques et des structures plissées. Cette analyse reste toutefois délicate et l'ingénieur doit y consacrer tout son art pour obtenir des résultats sûrs.

Les éléments finis recommandés sont les éléments plaques-membranes, les éléments de coque surbaissée et les éléments de type isoparamétrique tridimensionnel dégénéré, tous exprimés en coordonnées cartésiennes.

11.11 Exercices

Les exercices suivants sont davantage destinés à la discussion dirigée en groupe qu'à la résolution individuelle.

11.11.1 Discuter *tous les problèmes* relatifs à la formulation d'un élément fini destiné à calculer toute coque mince à géométrie et chargement de révolution. Choisir l'élément le plus simple possible.

11.11.2 Généraliser la discussion de l'exercice précédent : élément plus évolué ; élément courbe ; coque d'épaisseur modérée ; etc.

11.11.3 Discuter plus en détail les possibilités, avantages et inconvénients des *deux présentations* des éléments de type isoparamétrique tridimensionnel dégénéré (§ 11.7.3).

11.11.4 Discuter avec plus de détail les problèmes de discrétisation abordés dans la section 11.8, en particulier en fonction du type des éléments finis (plan/surbaissé/à forte courbure ; mince/d'épaisseur modérée ; etc.).

11.11.5 Un silo cylindrique à ciment, réalisé en béton, comporte, à sa base, une ouverture d'accès carrée raidie (fig. Ex. 11.11.5 ; silo de l'usine des Ciments et Bétons d'Eclépens, Suisse). Il est précontraint dans le sens circonférentiel (sauf sur les 3 mètres inférieurs). On envisage les charges statiques suivantes : poids mort, précontrainte et matière ensilée. On admet $E = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ et $\nu = 0,2$.

Le bureau d'études a proposé d'analyser en détail les 8 mètres inférieurs du silo, en admettant la base soit encastrée, soit articulée.

Discuter la modélisation et la discrétisation de la zone inférieure du silo. Etudier en particulier les problèmes liés à l'ouverture d'accès. La hauteur de 8 mètres est-elle correctement choisie ?

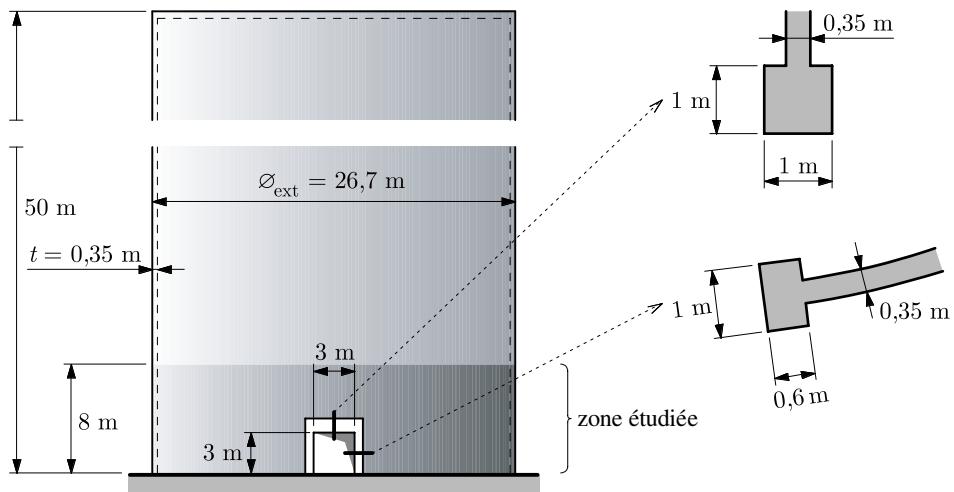


Fig. Ex. 11.11.5

11.11.6 On considère une coque munie de raidisseurs situés d'un seul côté de la coque (fig. Ex. 11.11.6). Discuter les problèmes soulevés par la modélisation et la discrétisation de la zone coque-raidisseur.



Fig. Ex. 11.11.6

11.11.7 Examiner les problèmes qui apparaissent lors de la discrétisation du pont de la figure 11.35(a) par des éléments finis du type isoparamétrique tridimensionnel dégénéré, pour les deux présentations possibles de ces éléments.

12 Instabilité

12.1 Complexité et importance du problème

L'instabilité se pose, dans les coques, avec toute la complexité souhaitée : non seulement la structure a en soi une géométrie souvent très compliquée, mais en plus le phénomène d'instabilité est difficile à percevoir. On sort en effet du cadre classique du flambement de barre, déversement de poutre et voilement de plaque, bien délimité. Dans la coque, l'instabilité est floue, multiple, malaisée à visualiser, tant locale que globale. De plus son origine est difficile à déceler.

Or les coques, ouvrages tridimensionnels, ont ordinairement une grande résistance, permettant des parois fort minces. De ce fait, *le phénomène d'instabilité est souvent déterminant pour le dimensionnement et, donc, pour la sécurité.*

Dans le cadre de cet ouvrage, on ne peut entrer dans les détails, mais seulement rendre attentif à ce phénomène.

12.2 Echec de la théorie classique de l'instabilité

12.2.1 La théorie linéarisée mise en défaut

La théorie linéarisée (ou linéaire) de l'instabilité, dite aussi théorie *classique*, telle la théorie d'Euler pour le flambement des poutres, suppose que le comportement primaire stable de la structure est linéaire, jusqu'à l'instant où l'on atteint, pour un certain niveau de charge, dit *critique*, le *point de bifurcation*. En ce point, la réponse stable de la structure croise un autre mode de comportement, dit mode secondaire, le plus souvent instable.

L'expérience montre que, pour les coques, il n'y a quasiment aucun rapport entre la charge de bifurcation théorique et les résultats d'essai. En général, la théorie linéarisée *surestime* la charge réelle d'instabilité de la coque, et souvent *de beaucoup* (jusqu'à dix fois). Force est donc de constater que la théorie classique est a priori inutilisable pour les coques ; au plus fournit-elle quelques renseignements d'ordre qualitatif.

La raison en est que *l'instabilité des coques est très sensible aux imperfections*.

Une imperfection géométrique, même insignifiante, suffit pour rendre le comportement de la coque *non linéaire* dès le tout début de la mise en charge. De ce fait, la branche stable de la théorie linéarisée est illusoire et l'instabilité des coques ne peut être analysée que par la théorie non linéaire complète, c'est-à-dire en grands déplacements, ce qui est nettement plus compliqué.

Les coques sont particulièrement sensibles aux deux classes suivantes d'imperfections :

- les *imperfections géométriques* qui peuvent toucher la géométrie d'ensemble (tolérances de construction), la courbure, l'épaisseur, la position des charges (actions, précontrainte) et les conditions d'appui ;
- les *imperfections matérielles* à savoir les contraintes résiduelles, les phénomènes de retrait (soudures, béton) et de fissuration (béton), les matériaux à lois non linéaires (dispersion des caractéristiques mécaniques de plasticité, fluage, etc.) et les hétérogénéités diverses (béton, bois, matériaux composites).

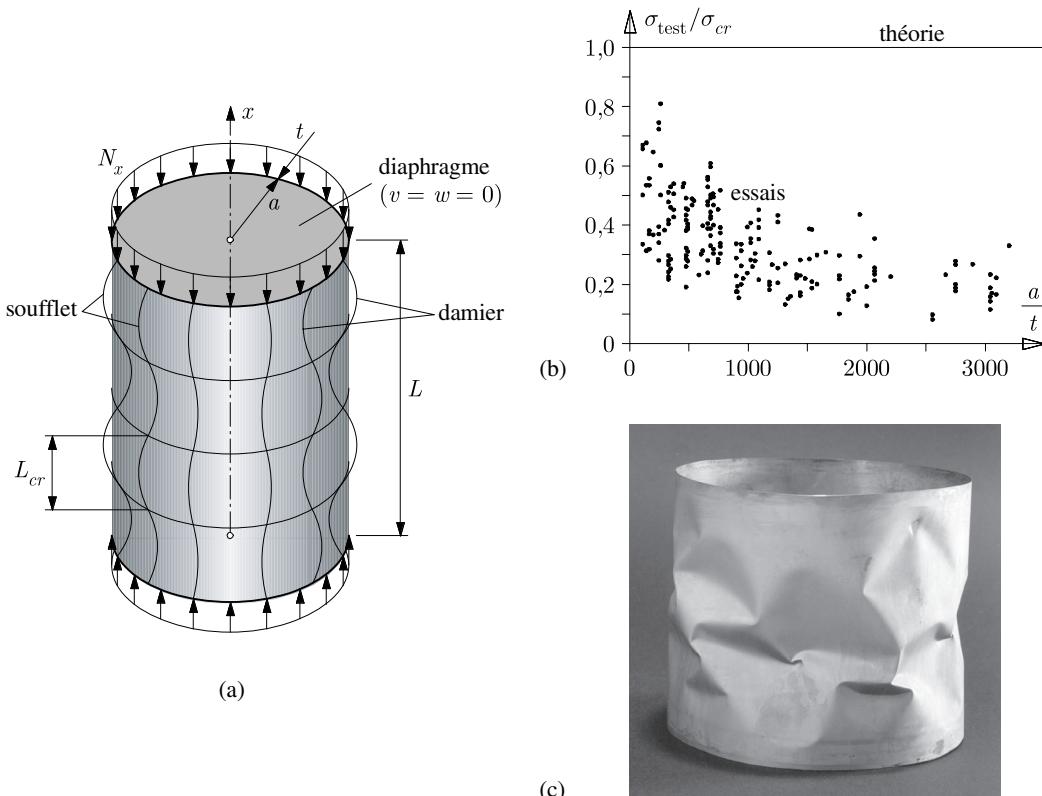


Fig. 12.1 Instabilité d'une coque cylindrique comprimée : (a) géométrie, charge et modes d'instabilité (en soufflet à gauche, en damier à droite); (b) distribution des résultats d'essai; (c) mode de voilement réel (essai du Prof. J.-F. Jullien, INSA, Lyon ; photo A. Herzog).

Il n'est pas exagéré de dire que la résistance à l'instabilité d'une coque dépend plus de ses imperfections que de sa forme géométrique théorique et des caractéristiques présumées du matériau la composant.

12.2.2 Coque cylindrique

Examinons le cas de la coque cylindrique circulaire comprimée (fig. 12.1a). La coque est mince, appuyée sur des diaphragmes d'extrémité – empêchant tout déplacement dans leur plan – et est uniformément comprimée axialement. Elle n'est ni trop courte (pour éviter un voilement local à l'image de bandes de plaque ; voir remarque ci-après), ni trop longue (pour ne pas flamber dans son ensemble comme une poutre).

La théorie linéarisée de l'instabilité prédit qu'un mode de voilement de la coque (en soufflet ou en damier) apparaît au moment où la contrainte normale axiale $\sigma_x = N_x/t$ atteint la valeur critique (Lorenz 1908 ; Timoshenko 1910)

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{a} \quad (12.1)$$

Cette valeur est en parfait désaccord avec les résultats expérimentaux (fig. 12.1b), même pour les éprouvettes réalisées avec le plus grand soin. Le mode de voilement réel est aussi différent : il est en losange (on dit aussi : en diamant ; fig. 12.1c).

Introduisons, dans la surface moyenne de la coque, une imperfection géométrique initiale, localisée, de révolution, sous forme d'une petite onde transversale d'intensité maximale \bar{w} . L'étude non linéaire de ce problème, ne tenant compte que de cette seule imperfection, montre que le comportement est fondamentalement différent de celui prédit par la théorie linéarisée (fig. 12.2). La réponse

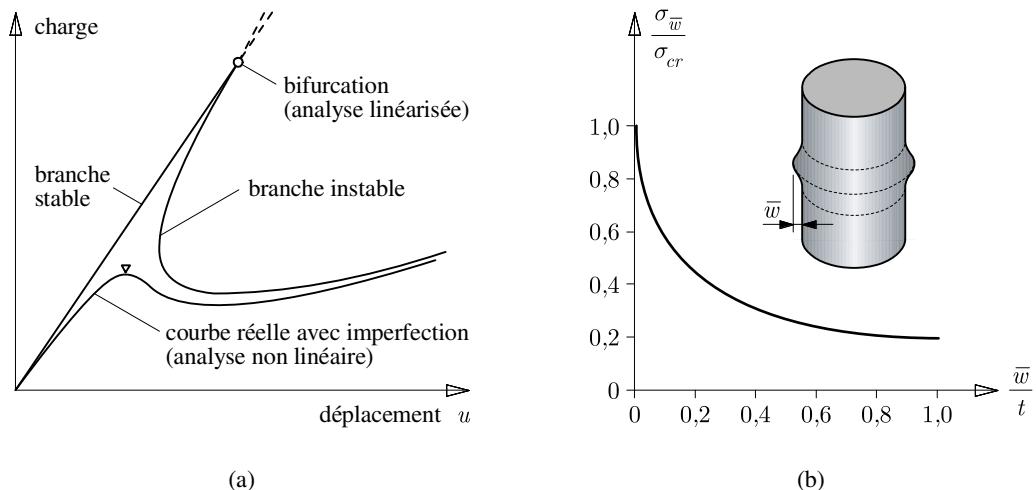


Fig. 12.2 Sensibilité de la force portante de la coque cylindrique à l'imperfection : (a) courbes du déplacement axial en fonction de la charge (allure) ; (b) courbe de sensibilité à l'imperfection géométrique (allure).

est maintenant une *divergence non linéaire* avec *point limite*, correspondant à une capacité portante de loin inférieure : pour une imperfection \bar{w} égale seulement au dixième de l'épaisseur de la paroi ($\bar{w} = t/10$), la capacité portante est réduite de l'ordre de 40 % par rapport à la charge critique (12.1). Ce comportement est d'ailleurs prévisible au vu de la branche secondaire instable après bifurcation, qui accuse une chute de résistance post-critique considérable.

Remarques

Le cas précédent est un exemple typique de *ruine catastrophique* : l'instabilité, une fois déclenchée, ne peut être stoppée, car il n'y a pas de réserve postcritique. Cette situation est caractéristique des coques – y soulignant le danger des phénomènes d'instabilité – mais non générale. Ci-avant, la coque est entièrement comprimée à la valeur critique au moment où se déclenche l'instabilité. Dans une coque où l'état de contrainte n'est pas uniforme, les zones peu sollicitées peuvent venir au secours des zones critiques et une certaine réserve postcritique peut se développer.

Les ondes de voilement ont une longueur L_{cr} de l'ordre de $4\sqrt{at}$ (fig. 12.1a). Si le cylindre a une longueur L inférieure à L_{cr} , l'instabilité est voisine de celle des génératrices flambant isolément comme des pièces de longueur L à section rectangulaire $t \times 1$ (instabilité en tonneau). Au contraire, si le cylindre est très long, il devient instable par flambement plan comme une poutre ; dès que la longueur L dépasse $a\sqrt{a/t}$ environ, il peut se développer une instabilité mixte entre le voilement et le flambement ; on parle d'*interaction flambement-voilement* : la résistance au flambement est affaiblie par le voilement prématûré de la paroi.

12.2.3 Quelles voies pour l'ingénieur ?

Il faut reconnaître que l'ingénieur peut se trouver fort démunie de moyens d'analyse devant certains phénomènes d'instabilité de coques.

Le *calcul numérique non linéaire* est actuellement la meilleure solution (§ 12.3). De nombreux codes commerciaux et universitaires offrent cette possibilité. Mais ce calcul doit inclure, outre les grands déplacements (non-linéarité géométrique), la non-linéarité matérielle (plasticité) et la prise en compte détaillée des imperfections, *sinon les résultats ne sont pas fiables*. Néanmoins, plusieurs difficultés apparaissent :

- il peut s'avérer difficile de maîtriser toutes les facettes utiles de l'analyse non linéaire, tant dans les notions théoriques que dans les algorithmes numériques ;
- les lois non linéaires bidimensionnelles de certains matériaux sont difficiles à modéliser avec précision ou sûreté (béton armé par exemple) ;
- les imperfections sont mal connues, ou pas connues du tout ; elles sont aléatoires et, le plus souvent, imprévisibles au stade du projet.

Ces divers obstacles, et surtout le dernier, handicapent fortement l'usage des moyens informatiques modernes. Certes, la connaissance des imperfections progresse, mais on doit rester très prudent dans les extrapolations, au risque de commettre de graves erreurs. En effet, choisir judicieusement les imperfections les plus dangereuses, en particulier celles géométriques (déformées initiales, tolérances, etc.), est primordial dans l'obtention d'un résultat réaliste, car un mauvais choix peut avoir l'effet contraire à celui redouté (raidissement de la structure).

On obtient aussi de bons résultats par des *essais de laboratoire*, qui ont l'avantage de tenir compte des conditions réelles et d'inclure d'emblée les imperfections. Pour certaines catégories de coques d'emploi fréquent (cylindres, sphères), il existe de nombreux résultats expérimentaux que l'on peut exploiter statistiquement afin d'en déduire des *courbes de voilement caractéristiques* (à l'image des courbes de flambement des pièces en acier par exemple (TGC vol. 2, § 21.3.2 et TGC vol. 10); fig. 12.14).

La *normalisation* s'est emparée de ces résultats pour fournir, dans certains domaines, d'intéressantes règles de dimensionnement. C'est le cas par exemple pour les coques en acier de forme cylindrique (nervurées ou non ; § 12.6.1), conique, sphérique et torosphérique, très courantes en construction industrielle (silos, mâts, tours, cheminées, récipients, conduites, pipelines, réservoirs, châteaux d'eau, etc.). Généralement, les normes préconisent de calculer la charge critique de bifurcation, puis de la pénaliser par des facteurs basés sur les courbes caractéristiques des essais, et tenant compte de la nature, du type, de l'intensité et de l'incertitude des imperfections.

Cette démarche revient, en gros, à se baser sur les résultats de la théorie linéarisée de l'instabilité, en se couvrant de grands facteurs de sécurité. Elle est acceptable si les facteurs ont une base scientifique sûre (essais bien documentés par exemple), mais devient hasardeuse lorsqu'on manque d'informations. Les facteurs sont alors extrapolés et, le plus souvent, trop pénalisants ... mais, parfois, trop peu !

Enfin il ne faut pas sous-estimer le sens pratique de l'ingénieur. En adoptant d'emblée des *dispositions de construction adéquates*, propres à lutter contre l'instabilité, on évite bien des difficultés (§ 12.4).

12.3 Analyse non linéaire

En allant du plus simple au plus avancé, on peut obtenir, en analyse numérique non linéaire, diverses charges ultimes. Ces charges sont définies ci-après dans le cadre discréétisé matriciel de la méthode des éléments finis. L'analyse non linéaire n'étant pas l'objectif de cet ouvrage, on se contente de ne donner que quelques relations classiques, utiles aux définitions, sans démonstration ni explications détaillées (voir la bibliographie).

12.3.1 Instabilité linéarisée et grands déplacements

Le plus commun est l'*analyse d'instabilité linéarisée*. Elle fournit la *charge critique de bifurcation*, ou charge critique d'Euler (indice E), à partir du problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_{cr,E} \mathbf{K}_\sigma) \mathbf{d}_{cr,E} = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

où \mathbf{K}_0 est la matrice de rigidité linéaire de la structure, \mathbf{K}_σ la matrice des contraintes initiales (proportionnelle à l'état de contrainte provenant du calcul linéaire), $\lambda_{cr,E}$ la valeur propre critique (multiplicateur critique des charges) et $\mathbf{d}_{cr,E}$ le vecteur propre des déplacements décrivant le mode d'instabilité associé.

Un critère plus fin consiste à tenir compte, en plus des contraintes, des déplacements linéaires \mathbf{d} (issus du calcul linéaire $\mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \mathbf{F}$, où \mathbf{F} est le vecteur force ; TGC vol. 6) dans le problème aux valeurs propres

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_{cr,D}(\mathbf{K}_d + \mathbf{K}_\sigma)) \mathbf{d}_{cr,D} = \mathbf{0} \quad (12.3)$$

où \mathbf{K}_d est la matrice des déplacements initiaux (linéaires). Ce critère a été proposé en 1971 par Dupuis, Pfaffinger et Marcal, et on parle parfois d'*instabilité de Dupuis* (indice D).

On doit avoir $\lambda_{cr,D} \leq \lambda_{cr,E}$. Si $\lambda_{cr,D} \ll \lambda_{cr,E}$, il est probable que la structure soit sensible aux imperfections géométriques initiales, d'où l'intérêt du critère de Dupuis ; mais les programmes offrant cette possibilité sont peu nombreux.

L'autre extrême est l'*analyse non linéaire incrémentielle, ou pas à pas*, tenant compte des *grands déplacements* (en fait, des grandes rotations). La réponse de la structure est obtenue progressivement, en calculant les accroissements de déplacements $\Delta \mathbf{d}$ associés aux accroissements de charge $\Delta \mathbf{F}$ par

$$\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{F} \quad (12.4)$$

où \mathbf{K}_t est la matrice de rigidité tangente (fig. 12.3). En procédant de la sorte, on peut parcourir la totalité de la courbe charge-déplacement de la structure et obtenir une excellente vue d'ensemble de son comportement. Deux cas d'instabilité sont possibles : la courbe passe par un maximum, appelé *point limite*, ou croise une autre branche (stable ou instable), au *point de bifurcation* (fig. 12.4).

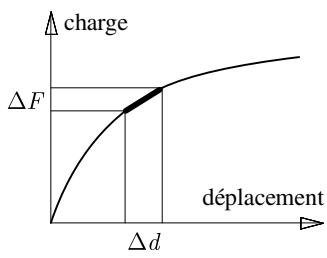
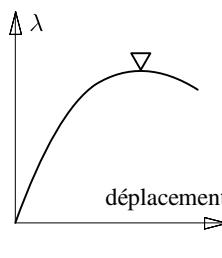
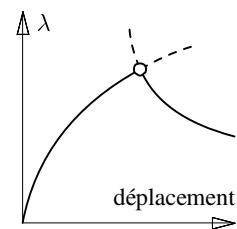


Fig. 12.3 Calcul incrémentiel d'une courbe charge-déplacement.



(a)



(b)

Fig. 12.4 Instabilité par : (a) point limite ; (b) point de bifurcation.

On peut faire cette analyse géométriquement non linéaire en tenant compte ou non de la non-linéarité matérielle (plasticité) et en y incluant ou non les imperfections. En fait, seule l'analyse tenant compte de *toutes les données réelles* de la structure n'a de valeur. Si l'on néglige quelque chose, la charge ultime correspondante ne saurait être utilisée comme valeur de référence. Au plus, si la charge ultime réelle a été calculée, peut-on se rendre compte de l'effet de ce qui est négligé (étude de *sensibilité aux imperfections*).

En conclusion, *un programme de calcul qui ne peut pas prendre en compte tous les phénomènes (grands déplacements, plasticité, imperfections) est sans utilité*.

12.3.2 Bifurcation et imperfections

En analyse non linéaire d'une structure réelle, le cas de la bifurcation ne devrait pas se produire. Les circonstances sont les mêmes qu'en analyse linéarisée, où de légères perturbations introduites

dans la géométrie ou le chargement d'une structure transforment la bifurcation d'Euler en divergence. L'apparition d'une bifurcation signifie que le modèle de calcul de la structure possède des symétries indésirables dans la géométrie ou dans le chargement, ou des imperfections incorrectement choisies ; elle traduit un raidissement artificiel de la structure, qui disparaît soudainement au point de bifurcation ; dans un tel cas, il faut perturber les données (géométrie, charges, imperfections, conditions d'appui, etc.) pour revenir à une divergence douce avec point limite.

Ce problème souligne à nouveau *l'importance du choix des imperfections*. Ce choix peut être délicat et n'obéit à aucune règle stricte. Les nombreuses mesures effectuées sur des structures réelles fournissent néanmoins d'utiles renseignements disponibles dans les documents de normalisation. On sait par exemple que l'intensité de l'imperfection d'une coque métallique peut atteindre l'épaisseur t , voire $2t$ si les conditions de fabrication ou montage sont difficiles. Quant à la forme générale de l'imperfection géométrique sur l'ensemble de la coque, elle est souvent choisie affine au premier mode propre d'instabilité linéarisée ; mais ce choix n'est pas toujours judicieux, ni le plus défavorable.

Exemple 12.1 – Structure plissée

L'étude de l'instabilité de la zone d'appui comprimée et cisaillée des poutres en caisson en acier, portant la couverture d'un stade (fig. 12.5), illustre les propos précédents. L'intensité de l'imperfection géométrique a été prise conformément aux normes (EUROCODE 3). On a d'abord choisi, pour la déformée initiale décrivant

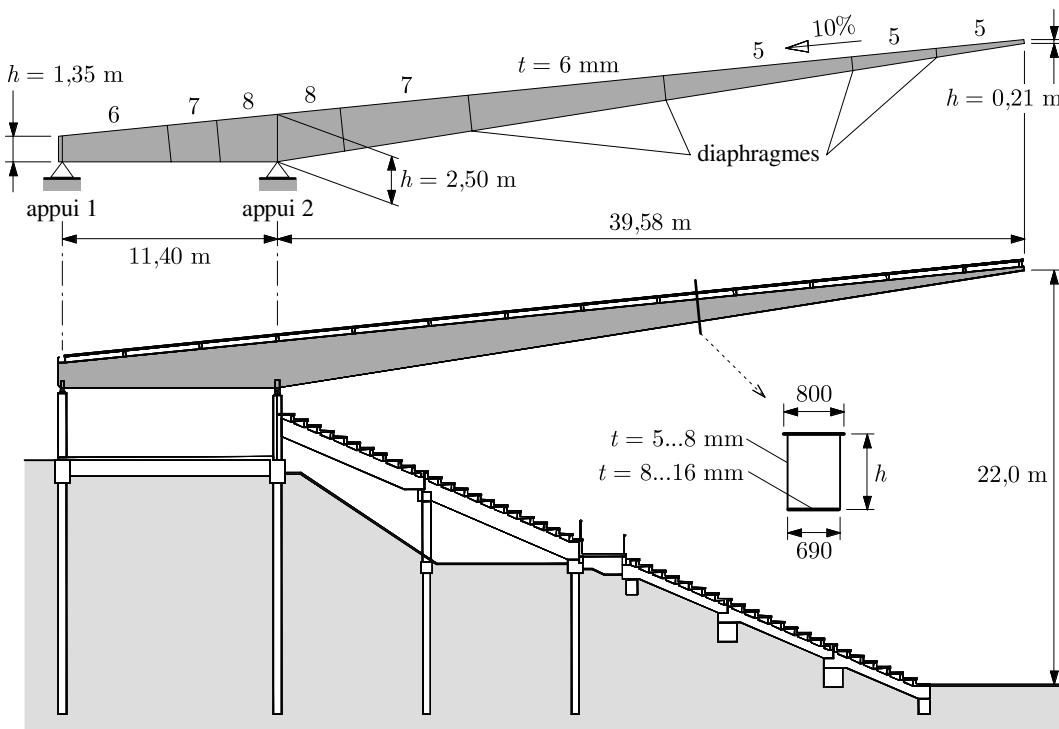


Fig. 12.5 Poutres supportant la toiture du stade Roi Baudoin à Bruxelles (1995).

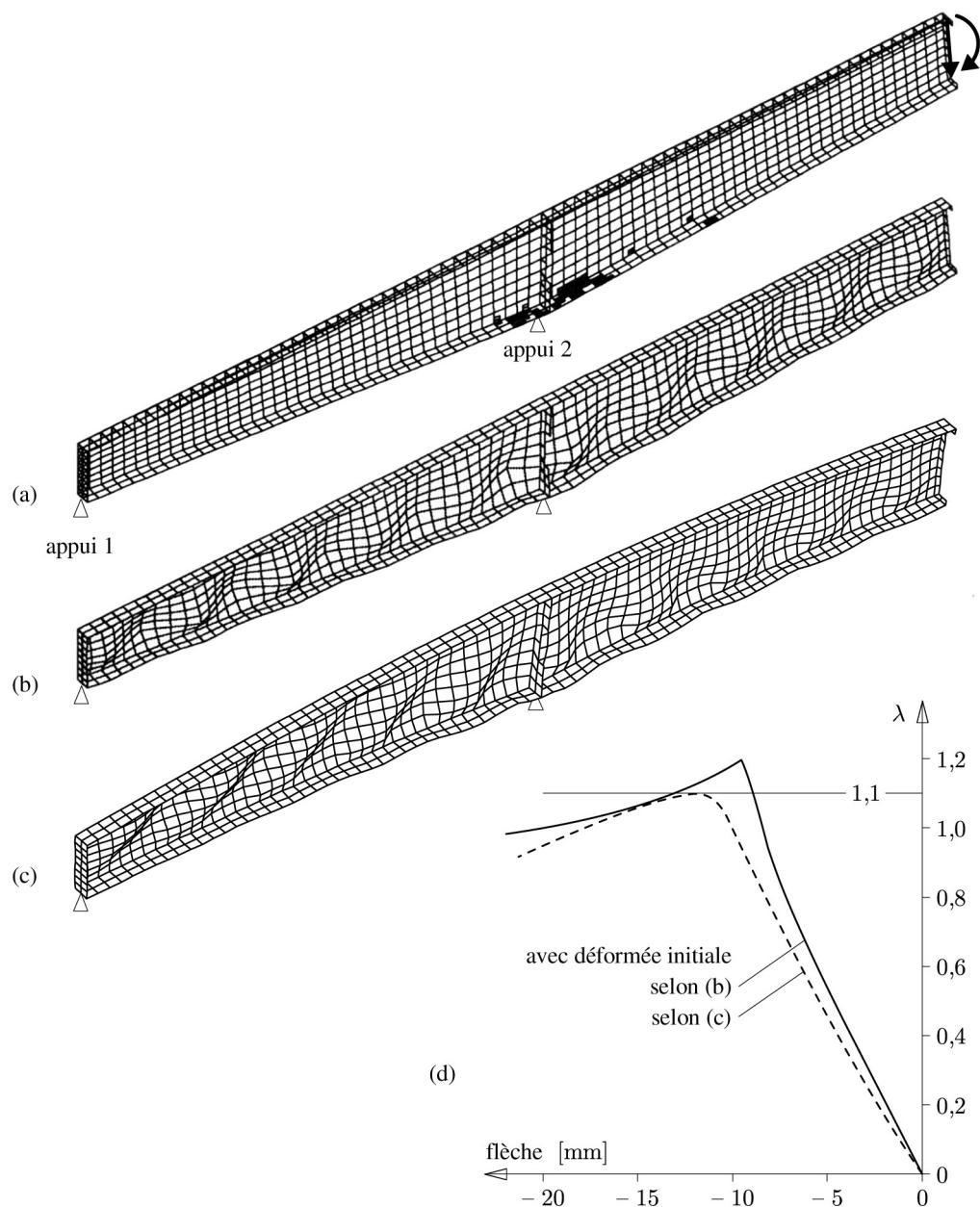


Fig. 12.6 Ruine de la zone comprimée et cisaillée sur appui des poutres de la figure 12.5 (demi-vues) :
 (a) maillage (éléments JET) et plastification ; (b) déformée initiale (2^e essai) ;
 (c) déformée à la ruine (instabilité en grands déplacements) et déformée initiale (affine, 3^e essai) ;
 (d) courbes flèche-charge d'un point typique de la semelle comprimée.

cette imperfection sur l'ensemble de la structure, une déformée proportionnelle au premier mode d'instabilité linéarisée ; mais ce mode, un voilement très localisé de la semelle inférieure sur l'appui 2, ne pouvait convenir (il est toutefois un bon indicateur de la finesse nécessaire du maillage d'éléments finis ; fig. 12.6a). Vu le type de poutre (à âmes minces soudées), on a défini une nouvelle déformée initiale nettement plus réaliste (fig. 12.6b). Il en est résulté la déformée à la ruine de la figure 12.6(c) – où le champ diagonal de traction des âmes travaillant en régime postcritique est bien visible – et la courbe flèche-charge du déplacement transversal maximal de la semelle comprimée (en trait plein) de la figure 12.6(d). Cette courbe montre une bifurcation, précédée d'ailleurs d'un raidissement de la structure dans la branche stable, visiblement suspects. En adoptant enfin comme déformée initiale une déformée affine à celle de ruine du cas précédent, on a obtenu une instabilité douce avec point limite (courbe en trait interrompu de la figure 12.6d). Le multiplicateur ultime ($\lambda = 1,1$) est très voisin de celui obtenu en suivant les règles de la normalisation (1,07). La figure 12.6(a) montre aussi les zones plastifiées à la ruine. (Source : V. de Ville de Goyet, *Initial deformed shape : essential data for a nonlinear computation*, Coupled Instabilities in Metal Structures, Proc. CIMS'96, J. Rondal, D. Dubina , V. Gioncu eds, Imperial College Press, 1996.)

12.3.3 Second ordre et instabilité incrémentielle

Entre l'instabilité linéarisée et l'analyse non linéaire en grands déplacements se situe un niveau intermédiaire, dit *analyse du second ordre*, dans lequel on fait l'hypothèse que *les rotations sont modérées* (TGC vol. 2, § 20.1.3). Il en résulte l'avantage d'une formulation théorique simplifiée, mais l'inconvénient d'une limitation sur l'intensité des rotations (à $0,1 \sim 0,2$ rad). Il convient donc d'être prudent. Si on a l'assurance que l'instabilité se produit effectivement dans le domaine des rotations modérées, les résultats sont corrects ; sinon, ils peuvent être faux, sans que le calcul numérique ne le signale ou ne puisse s'en rendre compte.

Enfin, en analyse non linéaire, il est possible d'effectuer, à tout niveau de charge, une analyse dite *d'instabilité incrémentielle*, c'est-à-dire un calcul d'instabilité aux valeurs propres de même nature que celui de l'instabilité linéarisée. Le but est de tenter de prédire la charge ultime (qu'il s'agisse d'un point limite ou de bifurcation), puisque les valeurs ainsi obtenues y convergent. Toutefois, la convergence n'est ni bornée, ni monotone, ni régulière, de sorte que les renseignements obtenus ont plus une valeur qualitative que quantitative.

Exemple 12.2 – Château d'eau

On examine ici le risque d'instabilité de la coque conique ABC formant l'essentiel du réservoir d'un château d'eau en acier (fig. 12.7a). Cette coque est comprimée dans le sens méridien (N_φ) par l'action de l'eau et du poids propre. Elle comporte, en B, un joint de montage circonférentiel soudé, au niveau duquel l'épaisseur change. La partie BC, plus mince ($t = 8$ mm), est la plus sensible à l'instabilité.

L'acier est élastique parfaitement plastique (limite d'élasticité $\sigma_e = 240$ N/mm²). On attribue à la charge (eau et poids propre), à la ruine, la valeur $\lambda = 1$ du multiplicateur. Si la structure et son chargement sont de révolution, les modes de ruine ne le sont pas forcément ! On doit donc discréteriser une certaine portion de la coque (fig. 12.9). Les calculs numériques ont été faits avec l'élément fini JET (§ 11.8.7) et le code FELINA du LSC/EPFL.

Les imperfections géométriques et matérielles sont données sur les figures 12.7(b) et (c). La soudure circonférentielle (joint de montage en B) crée une flèche transversale \bar{w}_1 (retrait), de 1,4 mm au plus, et des contraintes résiduelles σ_θ , dont l'intensité maximale atteint $2\sigma_e/3$. Suite aux conditions de montage, l'imperfection géométrique \bar{w}_2 , limitée à la coque fine ($t = 8$ mm) et de type sinusoïdal, a une amplitude de $2t = 16$ mm. L'imperfection totale est la combinaison de \bar{w}_1 et \bar{w}_2 . Ces imperfections ont été choisies au mieux en fonction des connaissances disponibles ; elles ont la symétrie de révolution ; d'autres imperfections ont été essayées, mais n'ont pas fourni de résultats plus défavorables.

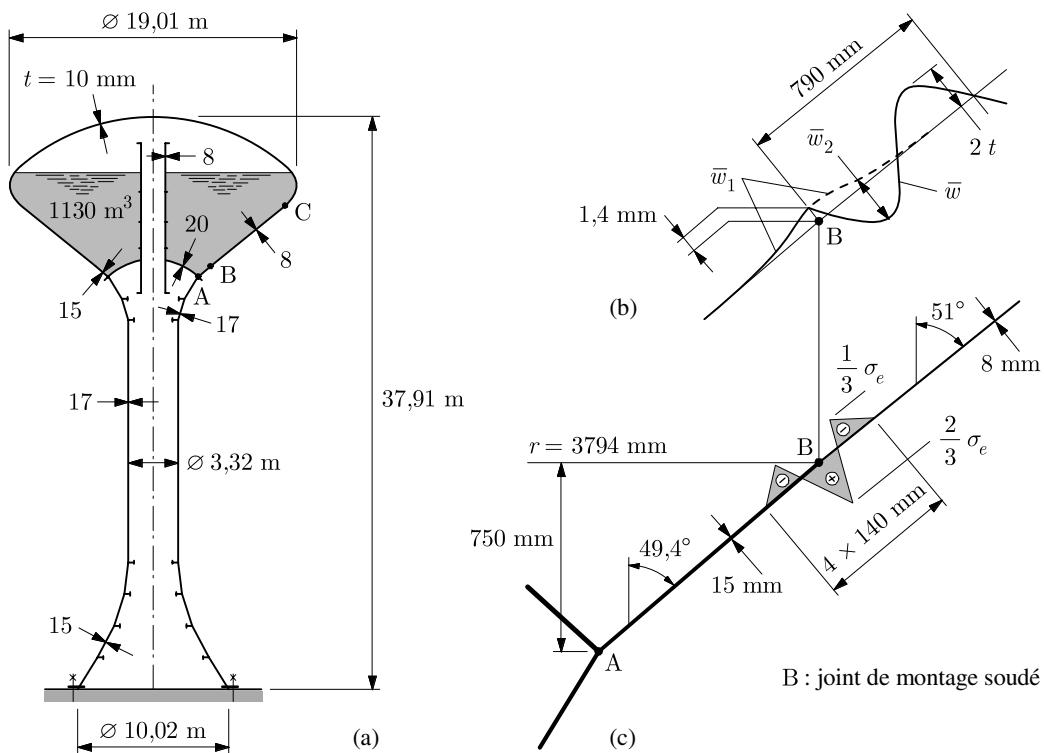


Fig. 12.7 Château d'eau : (a) géométrie générale ; (b) imperfection géométrique ; (c) imperfection matérielle.

Instabilité linéarisée

Le multiplicateur critique λ_{cr} , calculé en ignorant ou non les imperfections géométriques (les imperfections matérielles et la plasticité n'interviennent pas à ce stade), a les valeurs suivantes :

Mode de voilement :	de révolution		quelconque	
Imperfection géométrique :	sans	avec	sans	avec
• $\lambda_{cr,E}$	2,55	2,55	2,33	1,33
• $\lambda_{cr,D}$	2,47	1,37	2,33	0,84

La solution réelle étant $\lambda = 1$, on voit que les chiffres fournis par l'instabilité linéarisée n'ont aucune valeur quantitative. Qualitativement par contre, la sensibilité à l'imperfection géométrique est très marquée, même pour la charge d'Euler ; toutefois, bien que les valeurs soient supérieures, le mode de ruine final sera de révolution.

Analyse non linéaire

Le multiplicateur donné ci-après, tenant compte ou non des imperfections géométriques, ignore encore les contraintes résiduelles :

Mode de voilement :	de révolution		quelconque	
Imperfection géométrique :	sans	avec	sans	avec
• matériau élastique	2,45	2,04	2,26	1,43
• matériau élasto-plastique	1,81	1,07	> 1,81	> 1,07

Aucun des multiplicateurs ci-dessus n'est réaliste, mais on observe l'influence des divers effets : la plasticité, quoique très limitée (dans une zone de $40t = 320$ mm au voisinage de B), abaisse la résistance de quelque 25 % (2,45 → 1,81) ; l'imperfection géométrique fait chuter la capacité portante de près de 40 % (1,81 → 1,07). Le cumul des deux pénalise la force portante de 56 % (2,45 → 1,07).

La figure 12.8 montre le mode de ruine associé au multiplicateur $\lambda = 2,45$. Bien qu'irréaliste, il confirme que la faiblesse de la coque se situe bien dans la partie mince BC du cône ($t = 8$ mm).

Dès qu'intervient la plasticité, au voisinage de la charge ultime, le mode de ruine dominant est celui de révolution (fig. 12.9). Ce résultat est obtenu par une analyse d'instabilité incrémentielle.

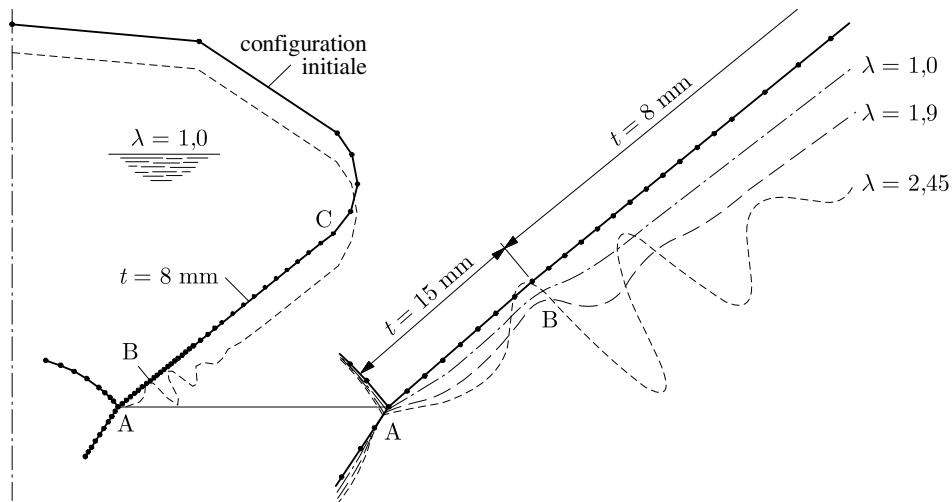


Fig. 12.8 Mode de ruine élastique axisymétrique de la coque sans imperfection ($\lambda = 2,45$; les déplacements sont agrandis cinquante fois).

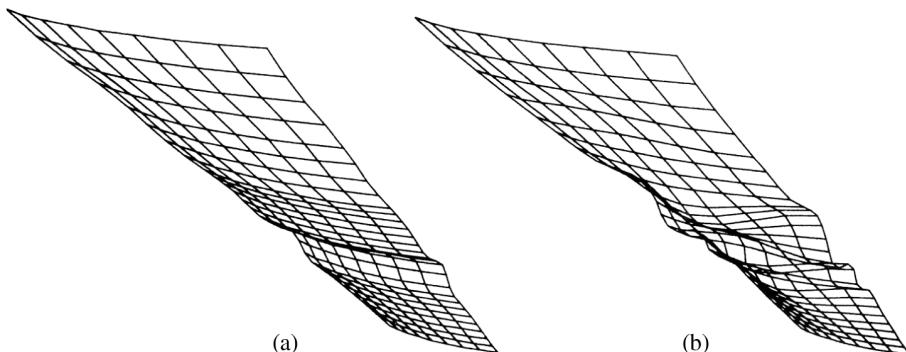


Fig. 12.9 Prévision des modes de ruine au voisinage de la charge maximale (analyse d'instabilité incrémentielle) : (a) mode symétrique ($\lambda = 1,08$) ; (b) mode asymétrique ($\lambda = 1,12$).

Finalement, en introduisant encore les contraintes résiduelles, le multiplicateur tombe à $\lambda = 1$. Cette imperfection a donc un effet défavorable d'environ 7 % (1,07 → 1) et la pénalisation totale due aux imperfections est de l'ordre de 60 % (2,45 → 1). La figure 12.10 montre le mode de ruine pour $\lambda = 1$; ce mode est en parfait accord avec le mode d'effondrement réel (correspondant à un multiplicateur $\lambda_{\text{réel}} = 1,02$).

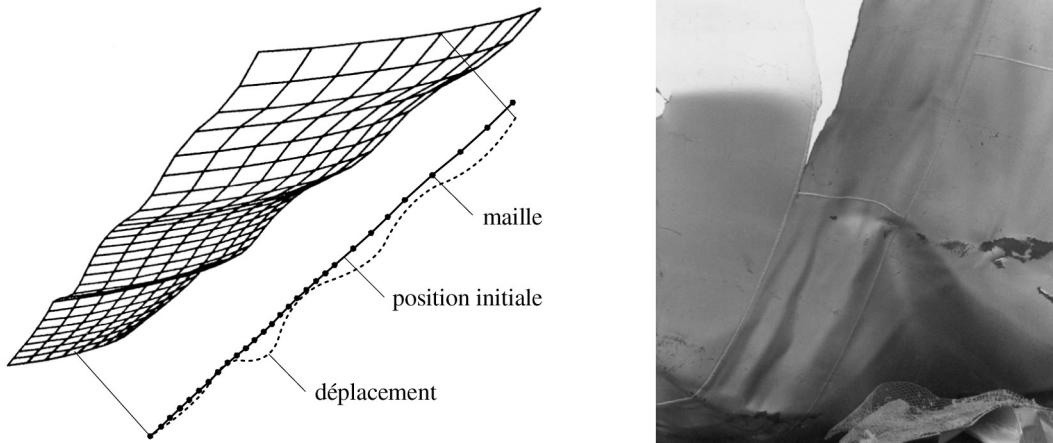


Fig. 12.10 Mode de ruine final de la coque conique (déplacements agrandis dix fois); les ondes de voilement sont bien visibles sur les fragments de la coque effondrée.

On tire de cette étude les conclusions suivantes, valables en toute généralité par ailleurs :

- les charges d'instabilité linéarisée sont irréalistes ;
- la force portante est fortement pénalisée par les imperfections géométriques, davantage que par les imperfections matérielles ;
- la plastification, même très localisée, joue un rôle important ;
- la force portante peut être estimée avec précision si les imperfections sont correctement prises en compte.

(Source : Ph. Jetteur, F. Frey, *Parametric study of a collapsed water tank*, Stability of Plate and Shell Structures, Proc. ECCS Colloquium, P. Dubas, D. Vandepitte eds., Ghent University, 1987.)

12.4 Forme rationnelle des coques pour lutter contre l'instabilité

Pour une coque sphérique (rayon a et épaisseur t) et une coque cylindrique très longue (rayon a et épaisseur t), soumises toutes deux à une pression uniforme p sur toute la surface, la théorie linéarisée fournit les pressions de bifurcation suivantes :

- sphère (Zoelly 1915)

$$p_{cr} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \left(\frac{t}{a} \right)^2 \quad (12.5)$$

- cylindre (Lévy 1884; Bryan 1886)

$$p_{cr} = \frac{1}{4(1-\nu^2)} E \left(\frac{t}{a} \right)^3 \quad (12.6)$$

Les conclusions *purement qualitatives* que l'on peut tirer de ces deux formules sont :

- les coques à double courbure sont beaucoup plus stables que celles à simple courbure; pour $t/a = 1/50$, la coque sphérique est plus de cinquante fois plus stable que la coque cylindrique (puissance 2 contre 3); le château d'eau de la figure 12.7(a) a été reconstruit comme le montre la figure 6.1;
- la diminution du rayon de courbure augmente la stabilité (a au dénominateur); il ne faut pas construire trop plat (sect. 12.5);
- l'augmentation de l'épaisseur favorise la stabilité (t au numérateur); dans le même ordre d'idée, la fissuration du béton armé a un effet défavorable sur la stabilité et il est donc préférable d'avoir une armature en double couche (même si la stricte résistance ne l'exige pas du tout);
- l'augmentation du module d'élasticité accroît la stabilité (p_{cr} proportionnel à E); un béton à haut module est donc recommandable (attention au béton léger, même si la stricte résistance autorise ce matériau).

Les *bords libres* des coques sont également fort sensibles au risque d'instabilité. Il faut éviter qu'ils soient trop comprimés et, si nécessaire, il faut les raidir. Diverses solutions techniques de raidissement sont possibles, qui peuvent être confrontées à de délicats problèmes d'esthétique. Pour le béton armé par exemple (fig. 12.11), on peut

- ajouter un raidisseur (souvent inesthétique);
- épaisser la coque (localement ; progressivement);
- accroître localement la courbure ;
- créer une contre-courbure.

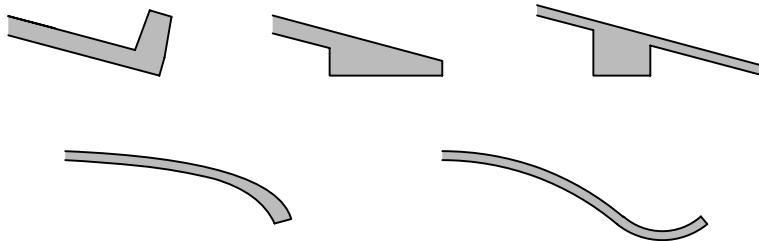


Fig. 12.11 Raidissement des bords libres (béton).

12.5 Instabilité par fluage et claquement

Dans les coques surbaissées comprimées, par exemple les couvertures en béton, où le poids propre est souvent la charge dominante, le *fluage* joue un rôle important. Il provoque en effet un changement lent de la géométrie de la coque, la rendant encore plus plate, et accroît de ce fait dangereusement le risque d'instabilité, appelé *instabilité par fluage*. Ce phénomène progressif peut se terminer par un retournement complet de la coque, appelé *claquement*, qui se produit brusquement quand on atteint la charge ultime (fig. 12.12).

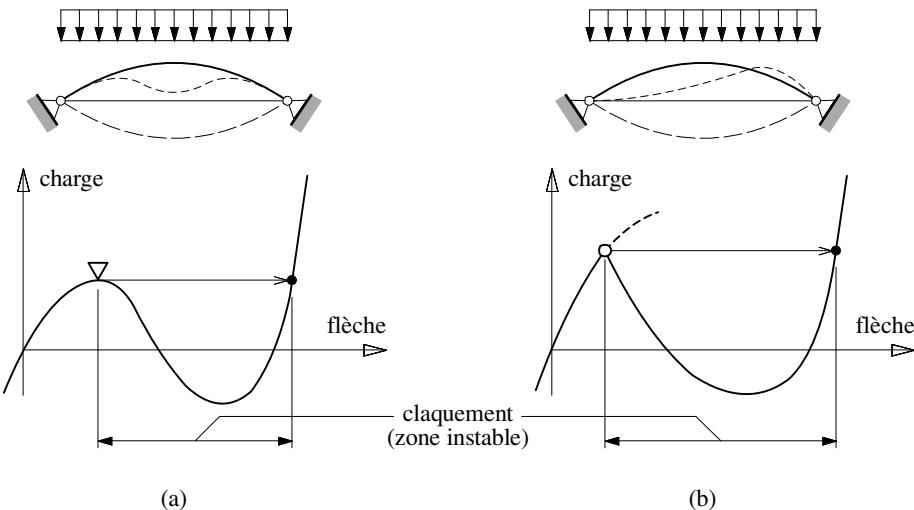


Fig. 12.12 Instabilité par claquement d'une coupole sphérique surbaissée :
(a) claquement symétrique par divergence ; (b) claquement asymétrique par bifurcation.

Les matériaux sensibles au fluage sont le béton, le bois, les polymères, le verre et les métaux à haute température. Il n'existe que peu de résultats dans le domaine de l'instabilité par fluage, pour laquelle par ailleurs les notions classiques de l'instabilité élastique ne s'appliquent pas.

En première approximation, pour le béton, il est recommandé d'introduire un module d'élasticité réduit (1/3, voire moins, du module à l'origine E_0), surtout si le béton est jeune au décoffrage, si on utilise du béton léger ou encore si le phénomène est accru par l'élasticité des appuis (mouvement ou fluage du sol de fondation).

12.6 Deux formules de dimensionnement

12.6.1 Voilement d'un cylindre en acier

Les formules suivantes, issues des recommandations de la Convention européenne de la construction métallique (CECM), permettent de contrôler le voilement des coques cylindriques en acier, comprimées axialement, et décrites à la section 12.2.2 (fig. 12.1a). La longueur L doit se situer dans la fourchette $4\sqrt{at} < L < a\sqrt{a/t}$.

On commence par définir la *qualité* de la coque (fabrication) par la mesure, ou le choix, de l'imperfection géométrique \bar{w} , soit le long d'un méridien avec une latte rectiligne de longueur $L_{cr} = 4\sqrt{at}$ (ou $25t$ au-dessus d'une soudure circonférentielle), soit le long d'un parallèle à l'aide d'une latte circulaire de rayon a et de même longueur L_{cr} (fig. 12.13). Pour appliquer les formules de dimensionnement, il faut que l'imperfection se situe entre les deux limites suivantes, où la valeur du facteur de réduction est à intercaler linéairement :

- bonne qualité : $\bar{w} = 0,01 L_{cr} \Rightarrow$ facteur de réduction α ;
- qualité standard : $\bar{w} = 0,02 L_{cr} \Rightarrow$ facteur de réduction $\alpha/2$;

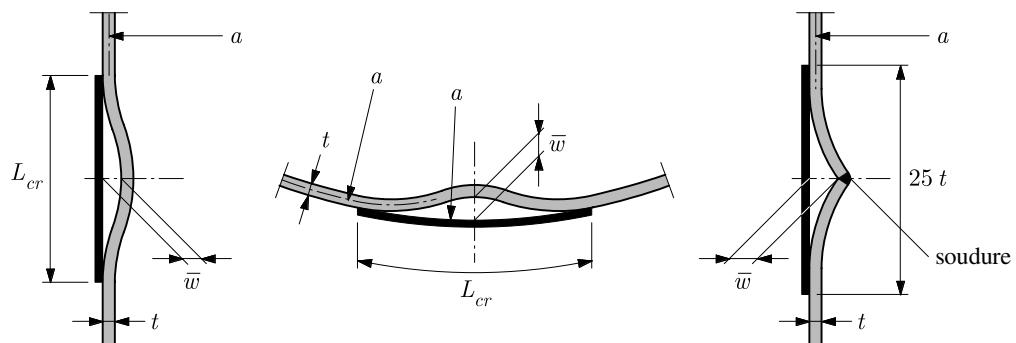


Fig. 12.13 Mesure de l'imperfection géométrique.

Le *facteur de réduction* α résulte de l'exploitation statistique des essais; il tient compte des imperfections liées à la géométrie, aux conditions d'appui, au matériau, à la mise en charge, etc. Il est représenté graphiquement à la figure 12.14 (qui reprend les résultats de la figure 12.1b) et vaut

$$\alpha = \begin{cases} 0,83 \left(1 + 0,01 \frac{a}{t}\right)^{-1/2} & \text{pour } \frac{a}{t} \leq 212 \\ 0,70 \left(0,1 + 0,01 \frac{a}{t}\right)^{-1/2} & \text{pour } \frac{a}{t} \geq 212 \end{cases} \quad (12.7)$$

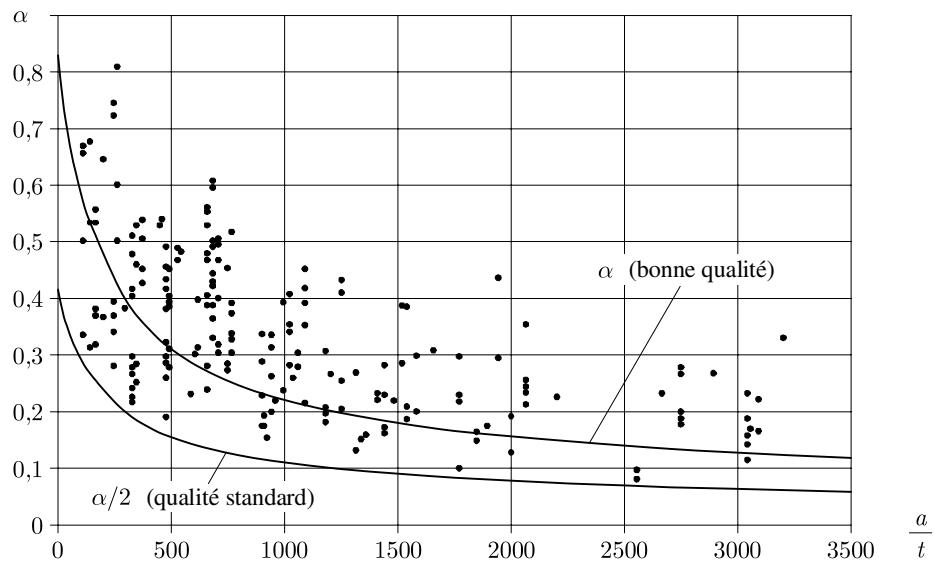


Fig. 12.14 Courbes caractéristiques de voilement.

On définit alors une courbe non dimensionnelle de voilement $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\lambda})$ (fig. 12.15), avec

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_u}{\sigma_e} \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\alpha \sigma_{cr}}} \quad (12.8)$$

où σ_u est la contrainte de voilement (contrainte ultime), σ_e la limite d'élasticité et σ_{cr} la contrainte de bifurcation (12.1), par les équations

$$\bar{\sigma} = \begin{cases} 1 - 0,4123 \bar{\lambda}^{1,2} & \text{si } \bar{\lambda} \leq \sqrt{2} \\ \frac{3}{4 \bar{\lambda}^2} & \text{si } \bar{\lambda} \geq \sqrt{2} \end{cases} \quad (12.9)$$

et la contrainte pondérée de calcul σ_d ne doit pas dépasser σ_u ($\sigma_d \leq \sigma_u$).

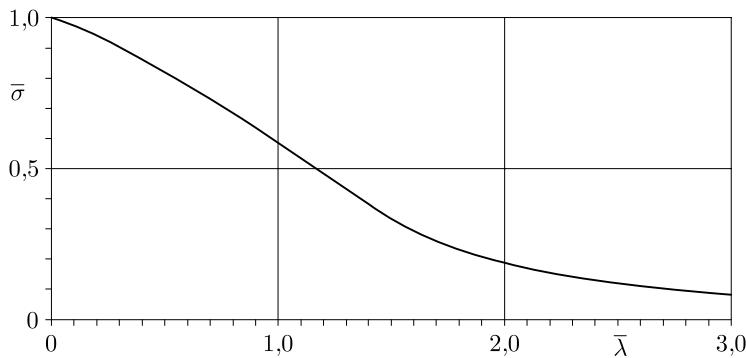


Fig. 12.15 Courbe de voilement des cylindres en acier comprimés axialement (CECM).

12.6.2 Un ordre de grandeur

Pour les *coques à double courbure gaussienne positive*, on a proposé la formule empirique suivante (Csonka 1956), s'inspirant de (12.5) et donnant un *ordre de grandeur* de la valeur ultime de la charge uniforme p_u provoquant l'instabilité,

$$p_u \cong \eta E \frac{t^2}{r_{\max} r_{\min}} \quad (12.10)$$

Cette formule a été confrontée à divers essais effectués sur des coques en aluminium et en micro-béton, avec les résultats suivants :

- coques en aluminium $\eta \cong 0,32$;
- coques en béton (sans fluage) $\eta \cong 0,54$;
- coques en béton (avec fluage) $\eta \cong 0,15$.

La valeur 0,32 est en bon accord avec les valeurs théoriques (calcul élastique), alors que la valeur 0,54 semble trop optimiste. Finalement, on recommande

- coques métalliques $\eta \cong 0,15$;
- coques en béton $\eta \cong 0,10$.

On utilisera la formule (12.10) avec grande précaution (prédimensionnement). Pour les coques sphériques en acier, il y a assez bon accord avec les recommandations de la CECM (pour $\eta \cong 0,15$ et dans le domaine élastique).

12.7 Exercices

12.7.1 On reprend le réservoir cylindrique de l'exercice 7.9.3, encastré à sa base, ouvert au sommet et soumis à une charge de vent (fig. Ex. 12.7.1). Quel danger d'instabilité guette ce réservoir ? Dessiner l'allure du mode d'instabilité probable.

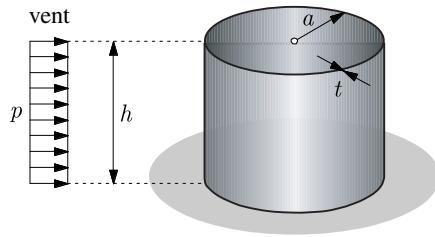


Fig. Ex. 12.7.1

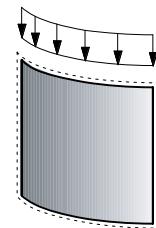


Fig. Ex. 12.7.2

12.7.2 Un panneau cylindrique, articulé sur tout son contour, est uniformément comprimé axialement (fig. Ex. 12.7.2). Esquisser son mode d'instabilité.

12.7.3 Les relations permettant le dimensionnement au voilement des coques cylindriques circulaires en acier, comprimées axialement, contiennent, outre le facteur α , un facteur de sécurité supplémentaire. Que vaut-il et quelle en est la raison ?

12.7.4 Un cylindre circulaire ($a = 2 \text{ m}$; $t = 10 \text{ mm}$), en acier ($E = 21000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$; $\sigma_e = 250 \text{ N/mm}^2$), de qualité standard, est comprimé par une force axiale centrée Q . Calculer sa charge ultime Q_u de manière à éviter tout voilement. Déterminer aussi entre quelles limites doit se situer la longueur L du cylindre pour que le calcul précédent soit valable. Trouver l'imperfection géométrique \bar{w} maximale autorisée. Enfin, calculer l'effort normal plastique Q_e et la charge de bifurcation Q_{cr} , à titre de comparaison.

12.7.5 On considère une coque cylindrique circulaire raidie longitudinalement et comprimée axialement. Les raidisseurs, de section rectangulaire, sont placés (soudés) soit à l'extérieur, soit à l'intérieur (fig. Ex. 12.7.5) ; ils sont, pour les deux cas, identiques (section, nombre). Quels sont les trois modes d'instabilité possibles qui peuvent menacer cette coque nervurée ? Considérant une instabilité globale, quelle est la coque la plus résistante, et pourquoi ?

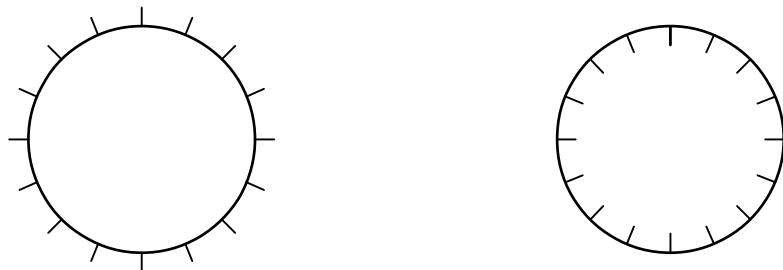


Fig. Ex. 12.7.5

12.7.6 Une calotte sphérique en béton armé, raidie par un anneau, est soumise à une pression uniforme (fig. Ex. 12.7.6). Les données numériques sont :

$$a = 21,3 \text{ m} \quad r = 10 \text{ m} \quad t = 8 \text{ cm} \quad p = 4 \text{ kN/m}^2 \quad E = 2100 \text{ kN/cm}^2 \quad \nu = 0,2$$

- 1) Calculer la pression critique de bifurcation p_{cr} comme si la sphère était complète .
- 2) Essayer l'ordre de grandeur donné au paragraphe 12.6.2.
- 3) Discuter l'influence de l'anneau raidisseur sur l'instabilité.
- 4) Y a-t-il risque d'instabilité par fluage ?

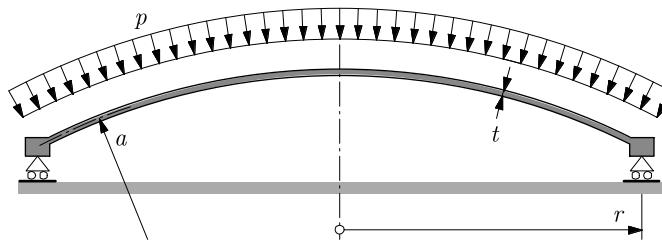


Fig. Ex. 12.7.6

Solution des exercices

Chapitre 4

4.8.1 Pour appliquer (4.9), couper la coque *et le fluide* au niveau du parallèle φ (simplification du calcul de F_Z).

4.8.2 $t = 20$ cm ; erreur de 10 % sur la charge.

4.8.3 Avec $C = pa^2/(2Et)$: $u_{X \text{ sphère}} = C(1 - \nu)$; $u_{X \text{ cyl.}} = C(2 - \nu)$; $u_{X \text{ ell.}} = C(2 - \nu - a^2/b^2)$.

4.8.4 1) Deux hémisphères indépendants ;

2) avec $c = \cos \varphi$: $N_\varphi = \pm at\gamma/(1 + c)$; $N_\theta = \pm at\gamma(c - 1/(1 + c))$ (signe + pour l'hémisphère inférieur) ; $R_Z = 2at\gamma$;

3) fig. Sol. Ex. 4.8.4.

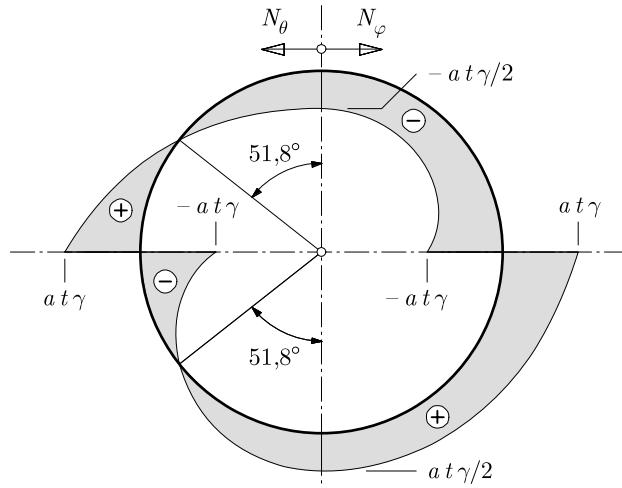


Fig. Sol. Ex. 4.8.4

4.8.5 2) $r_\varphi = \infty$; $\varphi = \text{cste} = \omega$; $r = s \cos \omega$; $r_\theta = s \operatorname{ctg} \omega$; $r_\varphi d\varphi = ds$; $N_s = -F_Z/(2\pi s \sin \omega \cos \omega)$; $N_\theta = -sp_z \operatorname{ctg} \omega$; $u_X = s\varepsilon_\theta \cos \omega$; $\theta_s = (N_s - \nu N_\theta) \operatorname{ctg} \omega / (Et) - (du_X/ds) / \sin \omega$;
 3) $N_s = st\gamma_a/(2 \sin \omega)$; $N_\theta = st\gamma_a \cos^2 \omega / \sin \omega$;
 4) $u_X = s^2(\gamma_a/E) \operatorname{ctg} \omega (\cos^2 \omega - \nu/2)$; $\theta_s = s(\gamma_a/E)(\operatorname{ctg} \omega / \sin \omega)(1/2 + \nu - (2 + \nu) \cos^2 \omega)$.

- 4.8.6** 1) $N_s = s\gamma \cos \omega (h/(2 \sin \omega) - s/3)$; $N_\theta = s\gamma \cos \omega (h/\sin \omega - s)$;
 2) $u_X = s^2(\gamma/(Et)) \cos^2 \omega ((h/\sin \omega)(1 - \nu/2) - s(1 - \nu/3))$;
 $\theta_s = s(\gamma/(Et))(\cos^2 \omega / \sin \omega)(-(3/2)(h/\sin \omega) + 8s/3)$;
 3) $N_{\text{ar}} = -N_s r_{\text{ar}} \cos \omega = -\gamma r r_{\text{ar}} (h/(2 \tan \omega) - r/3)$; $u_{\text{ar}} = N_{\text{ar}} r_{\text{ar}}/(EA)$;
 4) $t = 1,07 \text{ cm} \Rightarrow t = 12 \text{ mm}$;
 5) anneau: $u_{\text{ar}} = -2,43 \text{ mm}$ et $\theta_{\text{ar}} = 0$; cylindre: $u_X = 0,670 \text{ mm}$ et $\theta_x = 0,635 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$;
 cône: $u_X = 1,65 \text{ mm}$ et $\theta_s = -18 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

- 4.8.7** 1) $0 \leq Z \leq h: N_\varphi = (\gamma/6)(\tan \omega / \cos \omega)Z(3h - 2Z)$ et $N_\theta = \gamma(\tan \omega / \cos \omega)Z(h - Z)$;
 $h \leq Z \leq H: N_\varphi = (\gamma/6)(h^3 \tan \omega / \cos \omega)(1/Z)$ et $N_\theta = 0$;
 2) $N_{\varphi \text{ max}} \text{ en } Z = 3h/4$; $N_{\theta \text{ max}} \text{ en } Z = h/2$;
 4) $N_{\text{anneau}} = -(\gamma/6)h^3 \tan^3 \omega$.

- 4.8.8** $N_\varphi = N_\theta = -pr_s/2$.

- 4.8.9** 1) $r_\varphi = a/\cos^3 \varphi$; $r_\theta = a/\cos \varphi$;
 2) $A = (at\gamma/3)(1 - \cos^3 \varphi)/(\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)$;
 3) $N_\varphi = -(Q/(2\pi a))(\cos \varphi / \sin^2 \varphi)$; $N_\theta = -N_\varphi \cos^2 \varphi$; $u_X = (Q/(2\pi Et))(\nu + \cos^2 \varphi) / \sin \varphi$;
 en $\varphi = 0$, singularité sous la force concentrée.

Chapitre 5

5.12.2 Par symétrie, on peut n'analyser que la moitié droite du cylindre; avec l'origine de l'axe x au niveau de la charge, on a :

- 1) $w = (qa^3/(8D\lambda^3))(\gamma_3 + \gamma_4) = (qa^3/(8D\lambda^3))\gamma_1$;
 2) $M_x = (qa/(4\lambda))\gamma_2$; $V_x = -(q/2)\gamma_3$;
 3) en $x = 0: w_{\text{max}} = qa^3/(8D\lambda^3)$, $M_x \text{ max} = qa/(4\lambda)$ et $V_x \text{ max} = -q/2$.

- 5.12.3** 1) Réaction horizontale en base (force de bord) $\bar{H} = -\alpha TEt/(2\lambda \sin 70^\circ) = -0,48 \text{ kN/cm}$;
 $M_{\varphi \text{ max}} = -28,2 \text{ kN}$ en $Z \cong 1,46 \text{ m}$; $N_{\theta \text{ max}} = -19,8 \text{ kN/cm}$ en $Z = 0$.

- 5.12.4** $N_{\varphi,m} = Q/(\pi r \sqrt{2})$ avec $r = Z$ (singularité au sommet) et $N_{\theta,m} = 0$; réaction de l'effet de bord : $\bar{H} = (\nu/\lambda)Q/(\pi c \sqrt{2})$; $V_\varphi = -(\bar{H}/\sqrt{2})\gamma_2$; $N_{\varphi,f} = -V_\varphi$ (à combiner avec $N_{\varphi,m}$); $N_{\theta,f} = \lambda \sqrt{2} \bar{H} \gamma_3$;
 $M_\varphi = (c/\lambda)(\bar{H}/\sqrt{2})\gamma_4$; avec (5.53), $M_\theta = (c/(2\lambda^2))(1 - \nu^2)(\bar{H}/\sqrt{2})\gamma_1 + \nu M_\varphi$;
 V_φ , $N_{\varphi,f}$ et $N_{\theta,f}$ sont d'intensité maximale au bord ($\gamma_2 = \gamma_3 = 1$); M_φ est maximum pour $\gamma_4 = 0,3223$;
 avec $c/t = 25$ et $\nu = 0,25$, M_θ est maximum en $\xi \cong 0,6$ avec $M_{\theta \text{ max}} \cong 0,0145 \bar{H} c \cong 0,412 M_{\varphi \text{ max}}$;
 au bord, $M_\theta = \bar{H} c (1 - \nu^2)/(2\lambda^2 \sqrt{2}) \cong 0,008 \bar{H} c \cong 0,55 M_{\theta \text{ max}}$.

Chapitre 6

- 6.6.1** En $L/2: w = pa^2/(2Et)$; $|\theta_x| = pa\lambda/(2Et)$; $N_x = 0$; $N_\theta = -pa/2$; $M_x = M_\theta = 0$; $|V_x| = pa/(4\lambda)$.

6.6.2 Pour la moitié gauche chargée du cylindre, et pour un axe x orienté à gauche avec origine en $L/2$, on a, par superposition de la solution membranaire et de l'effet flexionnel de bord :

$$w = w_m + w_f = pa^2/(Et) - pa^2\gamma_3/(2Et); N_\theta = N_{\theta,m} + N_{\theta,f} = -pa + pa\gamma_3/2; M_x = pa^2\gamma_4/(4\lambda^2); M_\theta = \nu M_x; V_x = pa\gamma_2/(4\lambda).$$

Avec $\lambda = 5,2477$, on a, en $\lambda x/a = 1$ par exemple (soit $x = 9,53$ cm) : $N_\theta = -27,02$ kN/cm, $M_x = 4,22$ kN et $V_x = -0,16$ kN/cm ; avec le critère de von Mises, la zone la plus sollicitée se situe à la surface intérieure en $x \cong 15$ cm ($\sigma^* \cong 10,5$ kN/cm²).

6.6.3 Solution pour la calotte retournée de 180° ; avec $a = L/(2 \sin \alpha)$ (rayon de la sphère) :

- 1) $N_{\varphi,m} = -pa/2$; $N_{\theta,m} = -(pa/2) \cos 2\varphi$;
- 2) $u_{X,m} = (pa^2/(2Et))(\nu - \cos 2\varphi) \sin \varphi$; $\theta_{\varphi,m} = -(pa/(Et))(3 + \nu) \sin \varphi \cos \varphi$;
en $\varphi = \alpha$: $u_{X,m} = -0,00477523$ cm et $\theta_{\varphi,m} = -0,5617 \cdot 10^{-4}$ rad ;
- 3) $P = (pa/2) \cos \alpha$; avec Geckeler, $M_\varphi = (pa^2/(2\lambda))\gamma_4 \sin \alpha \cos \alpha$; $N_\theta = N_{\theta,m} + pa\lambda\gamma_3 \sin \alpha \cos \alpha$;
 $M_{\varphi \max}(\gamma_4 = 0,3223) = 5,78$ kN; $N_{\theta \max}(\gamma_3 = 1) = -10,73 + 760,87 \cong 750$ kN/m ;
en $\varphi = 0$ (sommet), $N_\varphi = N_\theta = -31,38$ kN/m.

6.6.4 Solution pour la structure retournée de 180° ; indices supérieurs : a = anneau, s = sphère ;

- 1) $N_m^a = -N_{\varphi,m}(L/2) \cos \alpha = (pa^2/2) \sin \alpha \cos \alpha = 462,72$ kN; $u_{X,m}^a = N_m^a L/(2EA) = 0,1469$ cm ;
- 2) au niveau de la jonction (intensités) : $M_0 = 0,459$ kN; $H_0 = 0,0461$ kN/cm ;
- 3) $\bar{H}^a = -H_0 \Rightarrow N^a = 462,72 - 82,98 \cong 380$ kN; $\bar{M}^a = -M_0 \Rightarrow M_\theta^a = 826,2$ kNm (dans la structure non retournée, ce moment tend les fibres inférieures du raidisseur) ;
- 4) $\bar{M}^s = M_0$ et $\bar{H}^s = H_0 \Rightarrow M_\varphi^s = -M_0\gamma_1 + (a/\lambda)H_0\gamma_4 \sin \alpha$ ($= -0,46$ kN en $\omega = 0$ et $\sim 0,76$ kN en $\omega \cong 2,2^\circ$ ($s \cong 1,2$ m)); $N_\theta^s = N_{\theta,m} - (2\lambda^2/a)M_0\gamma_2 + 2\lambda H_0\gamma_3 \sin \alpha$ ($\cong 106,2$ kN/m en $\omega = 0$ et ~ -23 kN/m en $\omega \cong 5,5^\circ$ ($s \cong 3,05$ m))).

Chapitre 7

7.9.1 Chaque coque a 8 conditions aux limites : (a) et (b) sont isostatiques, (c) est hyperstatique.

7.9.3 1) $N_x = (px^2/2a) \cos \varphi$; $N_{x\varphi} = -px \sin \varphi$; $N_\varphi = -pa \cos \varphi$;

2) base ;

3) $u = v = 0$; $u = v = w = \theta_x = 0$.

7.9.4 1) $N_x = (3px^2/2a) \cos 2\varphi$; $N_{x\varphi} = -(3px/2) \sin 2\varphi$; $N_\varphi = -pa \cos^2 \varphi$.

7.9.5 Dans des axes (X, Y, Z) et (x, φ) situés au centre de la coque retournée (fig. Sol. Ex. 7.9.5), on a :

1) $Z = (\operatorname{tg} \varphi_0/b)Y^2 = Y^2/12$ [m]; $r(\varphi) = 6/\cos^3 \varphi$ [m] ;

2) $N_\varphi = -6p/\cos^2 \varphi$; $N_{x\varphi} = px \sin \varphi$; $N_x = p(3 - x^2/12) \cos^4 \varphi$;

3) $N_\varphi = -6q/\cos \varphi$; $N_{x\varphi} = 0$; $N_x = 0$;

4) mauvaise directrice.

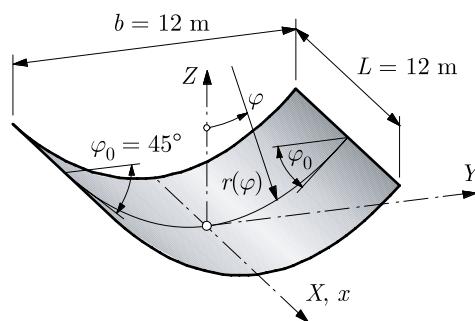


Fig. Sol. Ex. 7.9.5.

Chapitre 8

8.8.1 1) (8.12) vérifié dans les trois cas ;

- 2) $q = 25,133 \text{ kN/m}$; $I_y = 0,11877896 \text{ m}^4$; $S_{\max} = 0,060850 \text{ m}^3$; diagrammes : fig. Sol. Ex. 8.8.1 ;
 3) $M_{\varphi \max} = -8,6 \text{ kN}$ et $N_{\varphi \max} = -32,4 \text{ kN/m}$ ($\varphi_0 < \pi/4$).

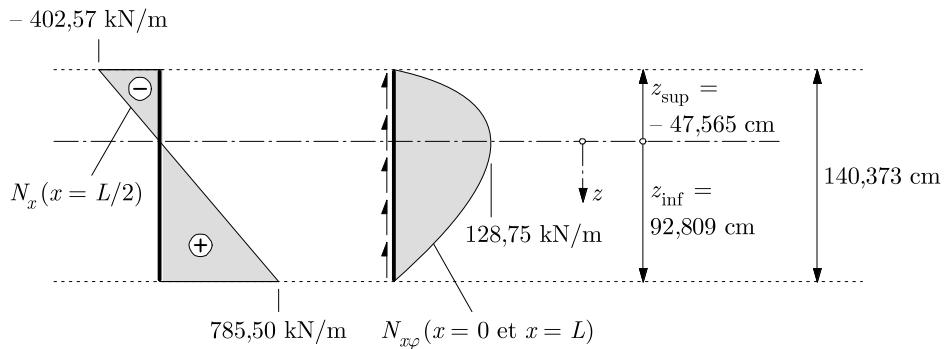


Fig. Sol. Ex. 8.8.1.

8.8.2 1) $q_{\text{arc}} = 3 \text{ kN/m}$; $s_{\text{arc,max}} = 12,88 \text{ kN/m}$; on détermine aisément la valeur et la position des composantes horizontale H et verticale F de la résultante R des forces s_{arc} (fig. Sol. Ex. 8.8.2) : (a) on excentre $N_{\varphi \max}$ de $z_0 = M_{\varphi \max}/N_{\varphi \max} = 0,265 \text{ m}$; les forces H et $N_{\varphi \max}$ sont alors égales et directement opposées, d'où $H = 32,4 \text{ kN}$ et $z_A = -0,21 \text{ m}$; (b) la résultante Q des forces q_{arc} est $Q = a\varphi_0 q_{\text{arc}} = 12,57 \text{ kN}$ et sa position résulte de (Varignon) $Qy_A = \int_0^{\varphi_0} (a \sin \varphi) (q_{\text{arc}} a d\varphi)$, d'où $y_A = 2,01 \text{ m}$; la force F est égale et directement opposée à Q ; R vaut $34,75 \text{ kN}$ et s'applique en $A(2,01; -0,21)$.

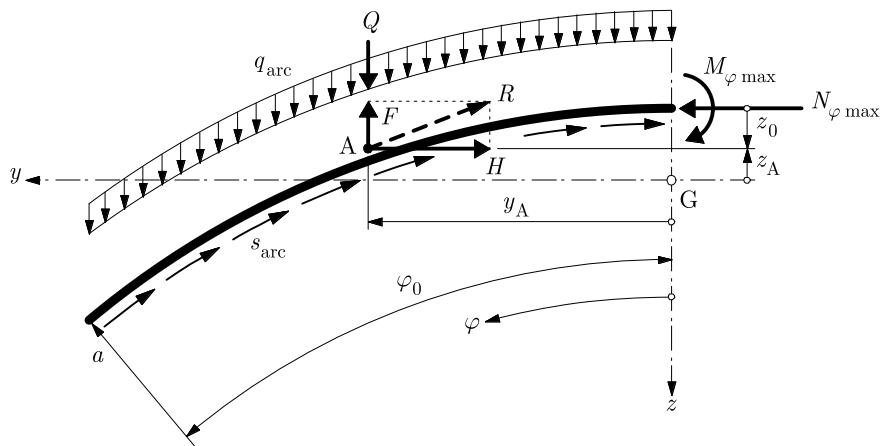


Fig. Sol. Ex. 8.8.2.

Chapitre 9

9.4.2 Au point bas, l'effort normal des quatre raidisseurs centraux est $N = -2N_{xy}d$ avec $d = \sqrt{a^2 + c^2}$ ou $d = \sqrt{b^2 + c^2}$; les quatre composantes verticales équilibrivent exactement la charge totale $4abq$.

9.4.3 1) $N_{xy} = N_{XY} = N_1 = N_2 = 42,7933$ kN/m (intensités); diagonale AD tendue, diagonale BC comprimée ;
 2) N linéaire ; $N_A = 0$ et $N_B = -599,1$ kN (hypothèse *surbaissé* $\Rightarrow L_{AB} = 14$ m) ;
 3) $M_{\max} = pL^2/8 = 42,875$ kNm ($p = 1,75$ kN/m) ; $N_A = 2,6$ kN et $N_B = -2,6$ kN (N linéaire) ;
 4) réactions verticales : $A_Z = D_Z = 24,5$ kN (poutres seules) ; $B_Z = C_Z = 24,5 + 256,76 = 281,26$ kN ;
 5) au centre du PH, bonne concordance pour N_{xy} ; la coque porte ses raidisseurs...

Chapitre 10

10.6.1 Un programme de bandes finies peut-il résoudre cette structure ?

Chapitre 12

12.7.3 Le facteur supplémentaire, γ , est bien visible dans la seconde formule (12.9); y introduisant (12.8), on obtient $\sigma_u = \alpha\sigma_{cr}/\gamma$ avec $\gamma = 4/3 = 1,33$; ce facteur tient compte des phénomènes suivants (où le premier a le plus de poids) : (a) résistance postcritique nulle ou très faible (risque de ruine catastrophique) ; (b) forte sensibilité à l'imperfection (géométrique) initiale ; (c) grande dispersion des résultats d'essais.

12.7.4 $Q_u = 13\,993$ kN ; $Q_e = 31\,416$ kN ; $Q_{cr} = 79\,860$ kN ; en gros, $0,6 \text{ m} \leq L \leq 28 \text{ m}$.

12.7.6 1) $p_{cr} = 349$ kN/m² ;
 2) $p_u = 29,6$ kN/m².

Bibliographie

Ouvrages théoriques

- FLÜGGE W., *Stresses in Shells*, Springer, 1973.
- KRAUS H., *Thin Elastic Shells*, Wiley, 1967.
- LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, 4th ed., 1934/1952.
- MØLLMANN H., *Introduction to the Theory of Thin Shells*, Wiley, 1981.
- NAGHDI P. M., *Foundations of Elastic Shell Theory*, in *Progress in Solid Mechanics*, Sneddon I. N. and Hill R. eds., North-Holland, 1963.
- NIORDSON F. I., *Shell Theory*, North-Holland, Elsevier, 1985.
- NOVOZHILOV V. V., *Thin Shell Theory*, Noordhoff, 1964.
- REISSNER E., *Linear and Nonlinear Theory of Shells*, in *Thin-Shell Structures*, Fung Y. C. and Sechler E. E. eds., Prentice-Hall, 1974.
- DONNELL L. H., *Stability of Thin-walled Tubes under Torsion*, NACA Tech. Rept. No. 479, 1933; *A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending*, Trans. ASME, Vol. 56, 1934.
- KOITER W. T., *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Theory of Thin Elastic Shells, Proc. IUTAM Symp., North-Holland, 1960.
- MARGUERRE K., *Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung*, Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech., Cambridge, Mass., USA, Wiley, 1938.

Ouvrages d'ingénieurs

- ACI, *Concrete Shell Structures – Practice and Commentary*, ACI 334.1R-92, Detroit 1992/7.
- ACI, *Hyperbolic Paraboloid Shells – State of the Art*, Christiansen J. ed., SP-110, Detroit, 1988.
- BAKER E. H., KOVALEVSKY L., RISH F. L., *Structural Analysis of Shells*, McGraw-Hill, 1972.
- BELES A., SOARE M., *Les paraboloides elliptiques et hyperboliques dans la construction*, Dunod, 1967.
- BILLINGTON D. P., *Thin Shell Concrete Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1982.
- CHILTON J., *Heinz Isler*, Thomas Telford, 2000.
- GIRKMANN K., *Flächentragwerke*, Springer, 1963.

- GOULD P. L., *Analysis of Shells and Plates*, Springer, 1988.
- RAMM E., SCHUNCK E., *Heinz Isler Schalen*, vdf Hochschulverlag AG, ETH Zentrum, Zürich, 2002.
- TIMOSHENKO S., WOINOWSKY-KRIEGER S., *Théorie des plaques et coques*, Béranger, 1961.
- TOOTH A. S., *Storage vessels*, Chapter 1 in *Developments in thin-walled structures I*, Rhodes J. and Walker A. C. eds., Applied Science Publ., G. B., 1982.
- YITZHAKI D., *Prismatic and Cylindrical Shell Roofs*, Haifa Science Publ., 1958; North-Holland 1959.
- DE FRIES-SKENE A., SCORDELIS A. C., *Direct Stiffness Solution for Folded Plates*, Proc. ASCE, ST 4, Vol. 90, Aug. 1964.
- GECKELER J. W., *Ueber die Festigkeit achsensymmetrischen Schalen*, Forschungsarb. Ing.-Wes., Heft 276, S. 1-52, 1926.
- GOLDBERG J. E., LEVE H. L., *Theory of Prismatic Folded Plate Structures*, Mémoires de l'AIPC, vol. 17, 1957.
- Report of the Task Committee on Folded Plate Construction, *Phase I Report on Folded Plate Construction*, Proc. ASCE, ST 6, Vol. 89, Dec. 1963.
- FONDER G., MASSONNET CH., *Structures tridimensionnelles*, Notes de cours, Université de Liège, M&S, 1967 (épuisé).

Méthodes numériques

- ASME, *Analytical and Computational Models of Shells*, Noor A. K., Belytschko T. and Simo J. C. eds., CED-Vol. 3, New York, 1989.
- BATOZ J.-L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis – Coques* (Vol. 3), Hermès, Paris, 1992.
- BERNADOU M., *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, Masson, Paris, 1994.
- CHEUNG Y. K., THAM L. G., *Finite Strip Method*, CRC Press, 1997.
- CHEUNG M. S., LI W., CHIDIAC S. E., *Finite Strip Analysis of Bridges*, E & FN Spon, 1996.
- CHEUNG Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon, 1976.
- ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *The Finite Element Method – Solid Mechanics* (Vol. 2), Butterworth-Heinemann, 2000.
- DEBONGNIE J.-F., *Etude critique de quelques formulations des coques en vue de l'application aux éléments finis*, Rapport SF-138, LTAS, Université de Liège, 1986.
- DUPUIS G., PFAFFINGER D., MARCAL P., *Effective use of the incremental stiffness matrices in non-linear geometric analysis*, High Speed Computing of Elastic Structures, Proc. IUTAM Symp., Fraeijs de Veubeke B. ed., Université de Liège, 1971.

- FRIEDRICH R., *Finite strip method : 30 years – A bibliography (1968-1998)*, Engineering Computations, Vol. 17, No. 1, 2000.
- IDELOHN S., *On the use of deep, shallow or flat shell finite elements for the analysis of thin shell structures*, Computer Methods in Appl. Mech. and Engng. **26** (1981) 321-330.
- MACKERLE J., *Finite and boundary element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures – A bibliography (1999-2001)*, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 38, June 2002.
- NOOR A. K., *Bibliography of Monographs and Surveys on Shells*, Appl. Mech. Review, Vol. 43, September 1990.
- WEMPNER G., *Mechanics and Finite Elements of Shells*, Appl. Mech. Review, Vol. 42, May 1989.
- YANG H. T. Y., SAIGAL S., MASUD A., KAPANIA R. K., *A Survey of Recent Shell Finite Elements*, Int. J. for Numerical Methods in Engng. **47** (2000) 101-127.

Instabilité

- ACI, *Concrete Shell Buckling*, Popov E. P. and Medwadowski S. J. eds., SP-67, Detroit, 1981.
- BRUSH D. O., ALMROTH B. O., *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1975.
- BUSHNELL D., *Computerized Buckling Analysis of Shells*, Kluwer, 1989.
- DIN 18800 Teil 4, *Stahlbauten : Stabilitätsfälle, Schalenbeulen*, Nov. 1990; Beuth Verlag, Berlin.
- ECCS, *Buckling of Steel Shells – European Recommendations*, ECCS Technical Working Group 8.4, 4th ed., Bruxelles, 1988.
- SAMUELSON L. A., EGGWERTZ S. (eds.), *Shell Stability Handbook*, Elsevier, 1992.
- FREY F., *Incremental instability*, LSC Report 86/5, LSC/EPFL, 1986.
- ROTTER J. M., *Shell structures : the new European standard and current research needs*, Thin-Walled Structures, Vol. 31, May 1998.

Index

Les numéros renvoient aux chapitres (un chiffre), aux sections (deux chiffres) ou aux paragraphes (trois chiffres).

- Anneau raidisseur (ou de raidissement), 6.2
- Approximation de Geckeler, 5.11.2, 5.11.3, 5.11.4
- Arête, 1.5, 10, 11.6
 - artificielle, 11.8.2, 11.8.4
- Axe de révolution, 1.7.9, 4.2
-
- Bandé finie, 11.9.3
- Bifurcation, 12
- Binormale, 1.7.6
- Bryan*, 12.4
-
- Candela*, 9.1
- Cercle nodal, 6.4.1, 11.9.2
- Cheung*, 10.5.1
- Cinématique, 2.6
- Claquement, 12.5
- Codazzi*, 1.7.5
- Conditions aux limites, 2.10
- Coque, 1.1, 1.3, 1.4
 - à facettes, 11.6, 11.8.2
 - cylindrique autoportante, 7.1, 8.4
 - cylindrique, 4.7, 5.7, 7, 8
 - de révolution, 4, 5, 6, 11.9.2
 - en voûte d'arête, 9.2.3
 - prismatique, 1.5, 10.3, 10.4
 - sphérique (effet de bord), 5.11
 - surbaissée, 3.4
- Courbure
 - géodésique, 1.7.7
 - moyenne, 1.2.4
 - normale, 1.2.2
 - principale, 1.2.2
 - totale ou de Gauss, 1.2.4
- Csonka*, 12.6.2
- Cylindre long, 5.8.1
-
- Darboux*, 1.7.7
- De Fries-Skene*, 10.5.1
-
- Déformation, 2.6.2
- Déplacement, 2.6.1
- Diaphragme, 1.4.1, 7.1, 7.5.2, 10.3
- Direction
 - asymptotique, 1.2.4
 - principale (de courbure), 1.2.2
- Directrice, 1.4.1
- Dislocation, 11.8.2
- Divergence, 12
- Donnell*, 3.4.2, 3.4.3, 8.1, 11.4.1
- Dupuis*, 12.3.1
-
- Effet (flexionnel) de bord, 3.2.4, 5.8, 5.11
- Effort
 - intérieur, 1.3, 2.7.1
 - de bord équivalent, 2.10.1
- Elément fini
 - de coque, 11, 11.4.2
 - de coque d'épaisseur modérée, 11.7
 - de coque mince, 11.5
 - plaque-membrane ou de coque plan, 11.6
 - semi-analytique, 11.9.1
 - tridimensionnel dégénéré, 11.7.3
- Elément structural à paroi mince, 1.1
- Epaisseur, 1.1
 - modérée, 2.5
- Equations
 - cinématiques, 2.6.2
 - d'équilibre, 2.7.2
 - de Codazzi et de Gauss, 1.7.5
- Estat
 - flexionnel, 1.3
 - membranaire, 1.3
- Euler*, 1.2.5, 12.2.1, 12.3.1
-
- Face positive, négative, 4.4.3
- Force de bord, 5.8.1, 5.8.2, 5.11.2
- Forme fondamentale
 - (première —, deuxième —), 1.7.3, 1.7.4

Formule
 — d'Euler, 1.2.5
 — de Frenet, 1.7.6
Frenet, 1.7.4, 1.7.6

Gauss, 1.2.4, 1.7.5
Geckeler, 5.11.2
 Génératrice, 1.2.4, 1.4.1
Goldberg, 10.5.1

Hosssdorf, 8.7
 Hypothèses (théorie de Love), 2.4
 Imperfections, 12.2.1, 12.3.2, 12.6.1
 Instabilité, 12
 — incrémentielle, 12.3.3
 — linéarisée, 12.2.1, 12.3.1
 — non linéaire, 12.3
 — par fluage, 12.5
 Intersection (de coques), 6
Isler, 1.4.2

Jonction (de coques), 6
Koiter, 2.2, 11.4.1

Lamé, 1.7.3
Leve, 10.5.1
Lévy, 12.4
 Ligne
 — asymptotique, 1.2.4, 1.7.8
 — de coordonnée, 1.2.1, 1.7.1
 — de courbure principale, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4,
 1.7.1, 1.7.8
 — géodésique, 1.2.4, 1.7.8
 — nodale, 10.5.7, 11.9.3
 Loi constitutive, 2.8
 Longueur limite, 5.8.1
Lorenz, 12.2.2
Love, 2.2, 11.4.1
Lundgren, 8.5.1

Marcal, 12.3.1
Marguerre, 3.4.2, 3.4.4, 11.4.1
 Méridien, 1.4.1, 1.7.9, 4.2
 Méthode
 — de la poutre, 8.5, 10.4
 — des bandes finies, 10.4, 11.9.3

— des éléments finis, 11
Meusnier, 1.2.5
Mindlin, 11.4.1
 Moment parasite, 11.8.4

Nahgdi, 11.4.1
 Non linéaire (analyse —), 12.3
 Non-conformité, 11.3, 11.8.3
 Normale, 1.1
 Noue, 9.2.3

 Panneau, 1.5, 10
 Paraboloïde, 9
 Parallèle, 1.7.9, 4.2
 Paramètres de Lamé, 1.7.3
 Paroi, 1.1, 1.3
Pfaffinger, 12.3.1
 Plan normal, osculateur, rectifiant (Frenet), 1.7.6
 Plaque, 1.1, 1.3
 — circulaire, 5.13.2
 Plaque-membrane, 1.3
 Point elliptique, parabolique, hyperbolique, sphé-
 rique ou ombilical (d'une surface), 1.2.4
 Poussée au vide, 6.1
Pucher, 3.3.2

 Raideur extensionnelle, flexionnelle, 2.8
 Raidisseur, 7.5.3, 8.6, 9.2.1
 Rayon
 — de courbure (principal), 1.2.2
 — de torsion, 1.7.6
Reissner, 11.4.1
 Réservoir cylindrique, 4.7.2, 5.10
Rodrigues, 1.7.2
 Rotation autour de la normale, 11.8.5, 11.8.7

Schorer, 8.3
Scordelis, 10.5.1
 Section
 — droite, 1.2.3
 — normale, 1.2.2
 Sixième degré de liberté, 11.8.5, 11.8.6, 11.8.7
 Sixième équation d'équilibre, 2.7.2
 Statique, 2.7
 Structure
 — plissée, 1.1, 1.5, 10
 — tendue, 1.4.2
 Superposition (membranaire et flexionnelle), 5.9

- Surface
 - à double courbure, 1.2.4
 - à simple courbure, 1.2.4, 1.4.1
 - cylindrique, 1.4.1
 - de révolution, 1.4.1, 1.7.9
 - de translation, 1.4.1
 - développable, 1.2.4
 - expérimentale, 1.4.2
 - minimale, d'aire minimale, 1.2.4
 - moyenne, 1.1
 - moyenne surbaissée, 3.4.1
 - réglée, 1.2.4, 1.4.1
- Théorème
 - de Meusnier, 1.2.5
 - de Rodrigues, 1.7.2
- Théorie
 - de Donnell, 3.4.3
 - de Love ou des coques minces, 2
- de Marguerre, 3.4.4
- des coques d'épaisseur modérée, 11.7.1
- membranaire, 3.2
- Timoshenko*, 12.2.2
- Torsion (d'une ligne), 1.2.3, 1.7.6
- Variation de courbure
 - cinématique, 2.6.2
 - statique, 2.8
- Verrouillage (des éléments finis), 11.4.3, 11.7.3
- Voile, 1.1
- Voûte
 - autoportante, 1.4.1, 7.1, 8.4
 - courte, longue, 8.4, 8.5.4
 - raidie, 8.6
- Yitzhaki*, 10.4
- Zoelly*, 12.4

Notations

a	dimension ; rayon (cylindre, sphère...)
b	dimension ; largeur
c	variation de courbure cinématique ; dimension
g	accélération de la pesanteur
h	hauteur ; dimension
p	force de surface, pression, poids propre
p^*	second membre de l'équation différentielle de la coque cylindrique circulaire
q	charge répartie
r	rayon, rayon de courbure
$1/r$	courbure
$1/r_n$	courbure normale
$1/r_g, 1/t_g$	courbure géodésique, torsion géodésique
s	abscisse curviligne ; longueur d'arc
t	épaisseur
u, v, w	composantes du déplacement
w	déplacement transversal ou normal (ou radial : cylindre)
\bar{w}	imperfection géométrique (de type w)
$A, F, H, Q, R, T\dots$	force, charge, réaction, moment...
A, dA	aire, aire de l'élément de surface
A, B	paramètres de Lamé
C	constante ; couple
C, D	raideur extensionnelle, raideur flexionnelle
E, G	module d'élasticité (ou de Young), module de glissement (ou de Coulomb)
H, K	courbure moyenne, courbure totale ou de Gauss
I, II	première, deuxième forme fondamentale (d'une surface)
I, S	moment d'inertie, moment statique (poutre)
L	longueur, portée
L, N	paramètres de la deuxième forme fondamentale (d'une surface)
M	moment de flexion, moment de torsion
N	effort normal, effort tangentiel
N^*	effort tangentiel équivalent
P	poussée au vide, précontrainte
V	effort tranchant
V^*	effort tranchant équivalent (ou de Kirchhoff)
$(X, Y, Z), (x, y, z)$	systèmes d'axes cartésiens droits
(x, y, z)	coordonnées curvilignes (théories particulières)
(x, φ)	coordonnées d'une coque cylindrique (autoportante)
(r, θ)	coordonnées polaires

(α, β)	coordonnées curvilignes (sur une surface)
(φ, θ)	coordonnées d'une surface de révolution
$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \mu, \theta, \omega \dots$	angle
α	rotation (Mindlin)
α	facteur de réduction (voilement des cylindres)
β	glissement moyen (Mindlin)
ε, γ	dilatation ou déformation, glissement
γ	poids volumique
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$	fonctions (coques cylindriques)
λ	paramètre (coque cylindrique et sphérique); valeur propre (instabilité); multiplicateur (des charges)
ν	coefficient de Poisson
ψ, χ	variation de courbure statique
ρ, τ	rayon de courbure, rayon de torsion (Frenet)
$1/\rho, 1/\tau$	courbure, torsion (d'une courbe)
ρ	masse volumique
σ, τ	contrainte normale, contrainte tangentielle
σ_e	limite d'élasticité
θ	rotation (Love)
Ω, Ω'	configuration initiale, configuration déformée
Σ	surface, portion de surface
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	vecteurs unités dans (X, Y, Z)
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$	vecteurs unités dans une surface
$(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$	trièdre de Frenet
$(\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{n})$	trièdre de Darboux
\mathbf{u}	vecteur déplacement (composantes u, v, w)
\mathbf{p}	vecteur force de surface
\mathbf{k}, \mathbf{K}	matrice de rigidité
\mathbf{d}, \mathbf{F}	vecteur déplacement, vecteur force (méthode des éléments finis)

Indices

cr	critique (instabilité linéarisée)
f	flexionnel, effet flexionnel de bord
m	membranaire
p	poussée (au vide)
u	ultime, à la ruine
adm	admissible
lat	latéral
lim	limite
max, min	maximal, minimal

Abréviations et symboles

Abréviations

$^{\circ}\text{C}$	degré Celsius
cste	constant(e)
ép.	épaisseur
m	mètre
N	newton
rad	radian
PH, PE	paraboloïde hyperbolique, paraboloïde elliptique
CECM, ECCS	Convention Européenne de la Construction Métallique, <i>European Convention for Constructional Steelwork</i>
EPFL, ETHZ	Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Ecole polytechnique fédérale de Zürich (<i>Eidgenössische Technische Hochschule Zürich</i>)
LSC	Laboratoire de Mécanique des Structures et Milieux Continus (EPFL)
ULg	Université de Liège
Dép. M&S	Département de Mécanique des Matériaux et des Structures (ULg)
LTAS	Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales (ULg)

Symboles

\varnothing	diamètre
e	2,71828... (base des logarithmes naturels)
g	accélération de la pesanteur
π	3,14159...

